1996年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$a_n=l\ (1\leqq l\leqq 5)$ となる確率は、$n-1$ 回目まで l 以下の目が出て、n 回目に l の目が出るから　$\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{l}{6}\right)^{n-1}$

$a_n=6$ となる確率は、$n-1$ 回目までの目に関わらず、6の目が出ればよいから　$\dfrac{1}{6}$

a_n の期待値 $E(n)$ は

$$E(n)=1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}+4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}+5\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+6\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+1$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}E(n)=1$ ……(答)

(2)

(解答1)　漸化式の利用

n 回の試行を終えて、$n+1$ 回目の試行で2の個数が増える、すなわち $a_{n+1}=2$ となる確率は　$\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

すなわち、$n+1$ 回目の試行で n 回後から増える2の個数の期待値は $\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$ であるから

$$N(n+1)=N(n)+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\quad \therefore N(n+1)-N(n)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\quad \sum_{k=1}^{n-1}\left\{N(k+1)-N(k)\right\}=N(n)-N(1)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

$N(1)=1\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ であるから

$$\therefore N(n)=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}\quad \therefore \lim_{n\to\infty}N(n)=\frac{1}{4}$$ ……(答)

(解答2)　正攻法で解けないことはない

m 回目に初めて3以上の目が出たとすると、以後 $a_{m+1},\ a_{m+2},\ \cdots$ に2は現れない。

m 回目 $(2\leqq m\leqq n)$ に初めて3以上の目が出て、$m-1$ 回目までに2の目が k 回 $(1\leqq k\leqq m-1)$ 出る確率は

$${}_{m-1}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{3}{}_{m-1}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

また、n 回目まで2以下の目だけが出て、2の目が k 回 $(1\leqq k\leqq n)$ 出る確率は　${}_nC_k\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n}$

これより、期待値 $N(n)$ は　$N(n)=\dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{m=2}^{n}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}k\cdot{}_{m-1}C_k\right\}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n}k\cdot{}_nC_k$

ここで、$S_m=\sum_{k=1}^{m-1} k\cdot {}_{m-1}C_k$ とすると

$$k\cdot {}_{m-1}C_k=k\cdot\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!k!}=(m-1)\cdot\frac{(m-2)!}{(m-1-k)!(k-1)!}=(m-1)\cdot\frac{(m-2)!}{\{(m-2)-(k-1)\}!(k-1)!}=(m-1)\cdot {}_{m-2}C_{k-1}$$

より　$S_m=(m-1)\sum_{k=1}^{m-1} {}_{m-2}C_{k-1}$　二項定理により　$\therefore S_m=(m-1)\cdot 2^{m-2}$

$T_n=\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}S_m$ とすると　$T_n=\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}\cdot(m-1)\cdot 2^{m-2}=\frac{1}{6}\sum_{m=2}^{n}(m-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}$

$$\begin{array}{rl}
6T_n= & 1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\
-)\ 2T_n= & \quad 1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
\hline
4T_n= & 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}
\end{array}$$

$$\therefore T_n=\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}-\frac{1}{4}(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{4}(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$U_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot {}_nC_k$ とすると　$U_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot {}_nC_k=n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}=n\cdot 2^{n-1}$

$$\therefore N(n)=\frac{2}{3}T_n+\left(\frac{1}{6}\right)^nU_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{6}(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$N(1)=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ であるから、$n=1$ でも成立。　$\therefore \lim_{n\to\infty}N(n)=\frac{1}{4}$　……(答)