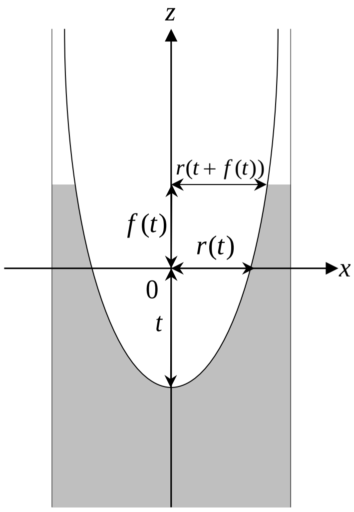
1996 年東大理$\boxed{5}$

題意の回転体が t 秒後に $z \leqq 0$ にある部分の体積は　$\pi\int_0^t \{r(z)\}^2\,dz$

これは t 秒後に $z \geqq 0$ に上昇する水の体積に等しい。このとき、$z=k\ (0 \leqq k \leqq f(t))$ における水面は、

外径 R 、内径 $r(z+t)$ のドーナツ型であり、面積は $\pi\left\{R^2-(r(z+t))^2\right\}$ であるから



$$\pi\int_0^{f(t)}\left\{R^2-(r(z+t))^2\right\}dz=\pi\int_0^t\{r(z)\}^2\,dz$$

$$R^2 f(t)-\int_t^{t+f(t)}\{r(z)\}^2\,dz=\int_0^t\{r(z)\}^2\,dz$$

$$\therefore R^2 f(t)=\int_t^{t+f(t)}\{r(z)\}^2\,dz+\int_0^t\{r(z)\}^2\,dz=\int_0^{t+f(t)}\{r(z)\}^2\,dz$$

両辺を t で微分すると、 $f(t)=e^t-t-1$ より

$$R^2 f'(t)=\{r(t+f(t))\}^2\cdot\{1+f'(t)\}$$

$$R^2(e^t-1)=\left\{r(e^t-1)\right\}^2\cdot e^t \qquad \left\{r(e^t-1)\right\}^2=R^2\,\frac{e^t-1}{e^t}$$

ここで、$s=e^t-1$ とおくと　$\{r(s)\}^2=R^2\,\dfrac{s}{s+1}$　　$\therefore r(s)=R\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}$

これは $r(0)=0,\ 0 \leqq r(s) < R$ を満たすから　$\therefore r(z)=R\sqrt{\dfrac{z}{z+1}}$　……(答)