1997年東大文 $\boxed{1}$

(1)

$a+b=t$ とおくと、

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=t^2-2ab=16 \quad \therefore ab=\dfrac{t^2-16}{2}$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=t^3-3\cdot\dfrac{t^2-16}{2}\cdot t=44 \quad t^3-48t+88=0 \quad (t-2)(t^2+2t-44)=0$

$\therefore t=2,\ -1\pm3\sqrt{5}$

ここで、$a,\ b$ は2次方程式 $x^2-(a+b)x+ab=x^2-tx+\dfrac{t^2-16}{2}=0$ の2解であるから、

$D=t^2-2(t^2-16)=-t^2+32\geqq0 \quad \therefore -4\sqrt{2}\leqq t\leqq4\sqrt{2}$

$-1-3\sqrt{5}<-1-6=-7 \quad -4\sqrt{2}+7=\dfrac{49-32}{7+4\sqrt{2}}=\dfrac{17}{7+4\sqrt{2}}>0 \quad \therefore -1-3\sqrt{5}<-7<-4\sqrt{2}$

$(-1+3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2=46-6\sqrt{5}-32=14-6\sqrt{5}=\dfrac{2(49-45)}{7+3\sqrt{5}}=\dfrac{8}{7+3\sqrt{5}}>0 \quad \therefore -1+3\sqrt{5}>4\sqrt{2}$

以上により、適するのは　$a+b=2$ ……(答)

(2)

$ab=-6$ である。$X_n=a^n+b^n$ とおくと

$2X_n=(a+b)(a^n+b^n)=a^{n+1}+b^{n+1}+ab(a^{n-1}+b^{n-1})=X_{n+1}-6X_{n-1} \quad \therefore X_{n+1}=2X_n+6X_{n-1}$

$X_2=16,\ X_3=44$ は4で割り切れる整数である。

$X_{k-1},\ X_k$ が4で割り切れる整数であるとき、$X_{k+1}=2X_k+6X_{k-1}$ より、X_{k+1} も4で割り切れる整数である。

以上により、$n\geqq2$ のとき、a^n+b^n は4で割り切れる整数である。(証明終)