1997年東大文 $\boxed{3}$

$P(x,\ y,\ z)$ とすると、$\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right|$ より

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \qquad -2x = -2y \qquad \therefore x = y$$

これより、$P(x,\ x,\ z)$ と置ける。さらに、$\left|\overrightarrow{PC}\right| = \left|\overrightarrow{PO}\right|$ より

$$x^2 + x^2 + (z-1)^2 = x^2 + x^2 + z^2 \qquad -2z + 1 = 0 \qquad \therefore z = \frac{1}{2}$$

$P\left(x,\ x,\ \frac{1}{2}\right)$ と置けるから　$\therefore \left|\overrightarrow{PA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PB}\right|^2 = (x-1)^2 + x^2 + \frac{1}{4} = 2x^2 - 2x + \frac{5}{4}$

$r^2\left|\overrightarrow{PO}\right|^2 = r^2\left(2x^2 + \frac{1}{4}\right)$ より　$2x^2 - 2x + \frac{5}{4} = r^2\left(2x^2 + \frac{1}{4}\right)$　$8(1-r^2)x^2 - 8x + 5 - r^2 = 0$ ――①

$r = 1$ とすると、①は $-8x + 4 = 0$ 、$x = \frac{1}{2}$ となるが、P が1つだけになり、不適。

$r \neq 1$ のとき、x についての2次方程式①が、2つの相違なる実数解を持つ条件は

$$D/4 = 16 - 8(1-r^2)(5-r^2) = 8(-r^4 + 6r^2 - 3) > 0 \qquad r^4 - 6r^2 + 3 < 0$$

$$\left\{r^2 - (3-\sqrt{6})\right\}\left\{r^2 - (3+\sqrt{6})\right\} < 0 \qquad 3-\sqrt{6} < r^2 < 3+\sqrt{6}$$

$3-\sqrt{6} < 1$ より　$\therefore \sqrt{3-\sqrt{6}} < r < 1,\ 1 < r < \sqrt{3+\sqrt{6}}$ ……（答）

このとき、①の解は　$x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{-2r^4 + 12r^2 - 6}}{8(r^2-1)} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-2r^4 + 12r^2 - 6}}{4(r^2-1)}$

求める P の座標は　$\therefore \left(\dfrac{2 \pm \sqrt{-2r^4 + 12r^2 - 6}}{4(r^2-1)},\ \dfrac{2 \pm \sqrt{-2r^4 + 12r^2 - 6}}{4(r^2-1)},\ \dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）……（答）