1997 年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

n 回目の操作で新たに塗りつぶされる単位正三角形のうち、既に塗りつぶされている単位正三角形と、1 つの辺だけを共有している単位正三角形の個数を $3p_n$、2 つの辺を共有している単位正三角形の個数を $3q_n$ とする。このとき、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} p_{n+1} = q_n + 2 \\ q_{n+1} = p_n - 1 \end{cases}$$

これより、

$$\begin{cases} p_{n+2} = q_{n+1} + 2 = (p_n - 1) + 2 = p_n + 1 \\ q_{n+2} = p_{n+1} - 1 = (q_n + 2) - 1 = q_n + 1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} p_{2m+1} = p_{2m-1} + 1,\ q_{2m+1} = q_{2m-1} + 1 \\ p_{2m+2} = p_{2m} + 1,\ q_{2m+2} = q_{2m} + 1 \end{cases}$$

$p_1 = 1, q_1 = 0$ および $p_2 = 2, q_2 = 0$ より、

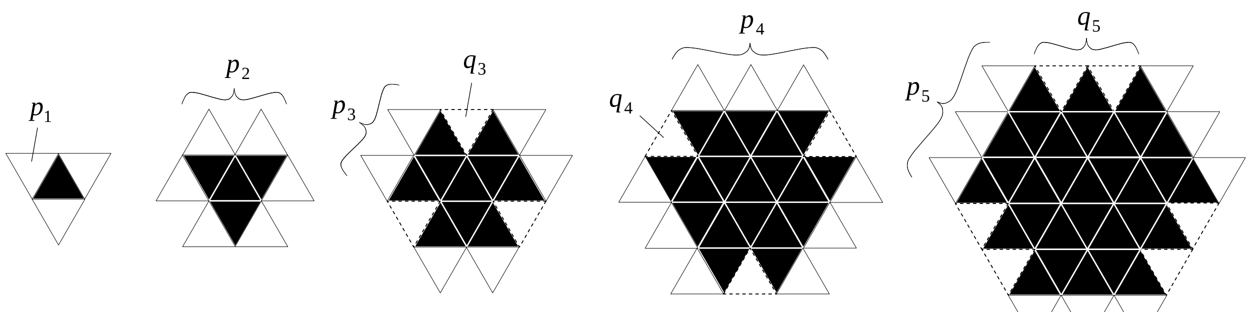
$$\begin{cases} p_{2m-1} = m,\ q_{2m-1} = m - 1 \\ p_{2m} = m + 1,\ q_{2m} = m - 1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} p_{2m-1} + q_{2m-1} = 2m - 1 \\ p_{2m} + q_{2m} = 2m \end{cases}$$

結局、n の奇偶に関わらず、$p_n + q_n = n$ が成り立つ。
n 回目の操作で新たに塗りつぶされる単位正三角形の個数は、$3(p_n + q_n) = 3n$ であるから
したがって、$n \geqq 2$ のとき、$a_n - a_{n-1} = 3n$ が成り立つ。$a_1 = 4$ より

$$\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \underset{p_2}{3}\sum_{k=2}^{n} k \quad a_n - a_1 = 3\left\{\frac{n(n+1)}{2} - 1\right\}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{2}n(n+1) - 3 + 4 = \frac{1}{2}(3n^2 + 3n + 2) \quad \cdots\cdots(答)$$

$n = 1$ でも成立する。



$p_1 = 1$ $\quad$ $p_2 = q_1 + 2 = 2$ $\quad$ $p_3 = q_2 + 2 = 2$ $\quad$ $p_4 = q_3 + 2 = 3$ $\quad$ $p_5 = q_4 + 2 = 3$

$q_1 = 0$ $\quad$ $q_2 = p_1 - 1 = 0$ $\quad$ $q_3 = p_2 - 1 = 1$ $\quad$ $q_4 = p_3 - 1 = 1$ $\quad$ $q_5 = p_4 - 1 = 2$

(2)

始めに 2 個以上有限個の単位正三角形が塗りつぶされている領域が一続きになっているとき、
必ずある $n=k$ において $a_1<b_1<a_k$ となる。b_1 に対応する領域全体が、a_k に対応する領域に含まれるように、k を十分に大きく取ると

$$a_n<b_n<a_{n+k-1} \quad \frac{1}{a_{n+k-1}}<\frac{1}{b_n}<\frac{1}{a_n} \quad \therefore \frac{a_n}{a_{n+k-1}}<\frac{a_n}{b_n}<1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+k-1}}=\frac{3n^2+3n+2}{3(n+k-1)^2+3(n+k-1)+2}<\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{3n^2}}{\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2+\frac{n+k-1}{n^2}+\frac{2}{3n^2}} \text{ より} \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+k-1}}=1$$

したがって、はさみうちの原理より　$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

始めに 2 個以上有限個の単位正三角形が塗りつぶされている領域が複数領域に分かれているとき、塗りつぶす操作を続けていくと、単位正三角形が塗りつぶされている領域は、必ずある $n=l$ において一続きとなる。
そして、必ずある $n=k>l$ において、$a_1<b_1<b_l<a_k$ となる。b_l に対応する領域全体が、a_k に対応する領域に含まれるように、k を十分に大きく取ると

$a_n<b_n<a_{n+k-1}$ より同様に　$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

以上により、始めの塗りつぶされ方がどうであっても $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ である。……(答)