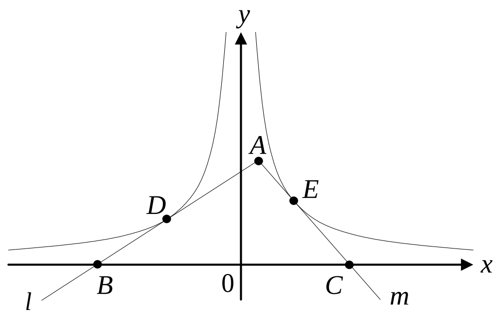
1997年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)



H 上の点 $D\left(s, -\dfrac{1}{s}\right)(s<0)$ における接線 l の方程式は

$y=\dfrac{1}{s^2}(x-s)-\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s^2}x-\dfrac{2}{s}$ であり、l と x 軸の交点は $B(2s, 0)$。

K 上の点 $E\left(t, \dfrac{1}{t}\right)(t>0)$ における接線 m の方程式は

$y=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$ であり、m と x 軸の交点は $C(2t, 0)$。

l と m の交点を A として、A の座標を求める。

$$\frac{1}{s^2}x-\frac{2}{s}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad t^2x-2st^2=-s^2x+2s^2t \quad (s^2+t^2)x=2st(s+t) \quad \therefore x=\frac{2st(s+t)}{s^2+t^2}$$

$$\therefore y=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{2st(s+t)}{s^2+t^2}-\frac{2}{s}=\frac{2}{s}\left\{\frac{t(s+t)}{s^2+t^2}-1\right\}=\frac{2}{s}\cdot\frac{st-s^2}{s^2+t^2}=\frac{2(t-s)}{s^2+t^2}$$

点 A, B, C, D, E の位置関係が条件を満たすには

l の傾きが BE の傾きより大きいから　$\dfrac{1}{t(t-2s)}<\dfrac{1}{s^2}$　$s^2<t^2-2st$　$\therefore t^2-2st-s^2>0$ ——①

m の傾きが DC の傾きより小さいから　$\dfrac{1}{s(2t-s)}>-\dfrac{1}{t^2}$　$t^2<-2st+s^2$　$\therefore t^2+2st-s^2<0$ ——②

$x=\dfrac{t}{s}$ とすると $x<0$ で、①、②より　$x^2-2x-1>0,\ x^2+2x-1<0$　$\therefore -1-\sqrt{2}<x<1-\sqrt{2}$ ——③

BC の長さは $2(t-s)$ で、三角形 ABC の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2(t-s)\cdot\frac{2(t-s)}{s^2+t^2}=\frac{2(t-s)^2}{s^2+t^2}=\frac{2(s^2+t^2-2st)}{s^2+t^2}=2-\frac{4st}{s^2+t^2}=2-\frac{4}{\frac{t}{s}+\frac{s}{t}}=2-\frac{4}{x+\frac{1}{x}}$$

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ とおき、③の範囲で増減を考える。$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$f(-1)=-2,\ f(-1-\sqrt{2})=f(1-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ より

x	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$\therefore -2\sqrt{2}<f(x)\leqq -2$

したがって　$\therefore 2+\sqrt{2}<S_1\leqq 4$ ……(答)

なお、等号が成立するとき、$\dfrac{t}{s}=-1$、$s+t=0$ であるから、点 A の x 座標は 0。

すなわち、等号は点 A が y 軸上にあるとき成立する。

(2)

$$\frac{AD}{AB}=\frac{\dfrac{2st(s+t)}{s^2+t^2}-s}{\dfrac{2st(s+t)}{s^2+t^2}-2s}=\frac{2t(s+t)-(s^2+t^2)}{2t(s+t)-2(s^2+t^2)}=\frac{t^2-s^2+2st}{2s(t-s)}$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{t-\dfrac{2st(s+t)}{s^2+t^2}}{2t-\dfrac{2st(s+t)}{s^2+t^2}}=\frac{(s^2+t^2)-2s(s+t)}{2(s^2+t^2)-2s(s+t)}=\frac{t^2-s^2-2st}{2t(t-s)}$$

三角形ADEの面積S_2は

$$S_2=S_1\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{2(t-s)^2}{s^2+t^2}\cdot\frac{(t^2-s^2)^2-4s^2t^2}{4st(t-s)^2}=\frac{(s^2+t^2)^2-8s^2t^2}{2st(s^2+t^2)}=\frac{s^2+t^2}{2st}-\frac{4st}{s^2+t^2}$$

$u=\dfrac{s^2+t^2}{2st}$とすると、$u=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{s}+\dfrac{s}{t}\right)=\dfrac{1}{2}f(x)$より、$-\sqrt{2}<u\leqq -1$

$g(u)=u-\dfrac{2}{u}$とおくと、$g'(u)=1+\dfrac{2}{u^2}>0$であるから、$g(u)$は単調増加。

$g(-\sqrt{2})=0,\ g(-1)=1$より　$\therefore 0<S_2\leqq 1$ ……(答)

等号は点Aがy軸上にあるとき成立する。