1997 年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

$N=10000$のとき、発生する整数と表示される下 4 桁の数はすべて 1 対 1 に対応している。

「0000」〜「9999」のいずれについても、2 回連続同じ数字が表示される確率は$\left(\dfrac{1}{10000}\right)^2$

したがって　$p_{10000}=10000\times\left(\dfrac{1}{10000}\right)^2=\dfrac{1}{10000}$　……(答)

(2)

$N=10001$のとき、「0001」が表示される整数は 1 か 10001 の 2 通り。

「0000」および「0002」〜「9999」が表示される整数は 1 通り。

$$\therefore p_{10001}=9999\times\left(\frac{1}{10001}\right)^2+1\times\left(\frac{2}{10001}\right)^2=\frac{10003}{10001^2}=\frac{10^4+3}{(10^4+1)^2}$$

$$p_{10001}-p_{10000}=\frac{10^4+3}{(10^4+1)^2}-\frac{1}{10^4}=\frac{(10^4+3)10^4-(10^4+1)^2}{(10^4+1)^2 10^4}=\frac{10^8+3\cdot10^4-(10^8+2\cdot10^4+1)}{(10^4+1)^2 10^4}$$

$$=\frac{10^4-1}{(10^4+1)^2}\times10^{-4}=\frac{9999}{100020001}\times10^{-4}=\frac{9999}{10002.0001}\times10^{-8}=0.99970\cdots\times10^{-8}$$

したがって、$p_{10001}>p_{10000}$で、その差は1×10^{-8}　……(答)

(3)

$N=10000+k\ (0\leqq k\leqq 10000)$のとき

発生する整数が1のときと10001のとき、2のときと10002のとき、$\cdots k$のときと$10000+k$のとき、それぞれ表示される下 4 桁の数は同じであるから

$$\therefore p_N=(10000-k)\times\left(\frac{1}{10000+k}\right)^2+k\times\left(\frac{2}{10000+k}\right)^2=\frac{10000+3k}{(10000+k)^2}$$

$f(k)=\dfrac{10000+3k}{(10000+k)^2}$ とおくと

$$f'(k)=\frac{3\cdot(10000+k)^2-(10000+3k)\cdot2(10000+k)}{(10000+k)^4}=\frac{3\cdot(10000+k)-2(10000+3k)}{(10000+k)^3}=\frac{10000-3k}{(10000+k)^3}$$

$\dfrac{10000}{3}=3333+\dfrac{1}{3}$ より　$0\leqq k\leqq 3333$のとき $f'(k)>0$　$3334\leqq k\leqq 10000$のとき $f'(k)<0$

$f(k)$が最大になるのは$k=3333$のときか$k=3334$のときである。

$f(3333)=\dfrac{19999}{13333^2}$，$f(3334)=\dfrac{20002}{13334^2}$ より

$$\begin{aligned}13333^2\cdot13334^2\cdot\{f(3333)-f(3334)\}&=13334^2\cdot(2\cdot10^4-1)-13333^2\cdot(2\cdot10^4+2)\\&=2\cdot10^4(13334^2-13333^2)-13334^2-2\cdot13333^2\\&=2\cdot10^4(13334+13333)(13334-13333)-177795556-2\cdot177768889\\&=2\cdot26667\cdot10^4-177795556-355537778\\&=533340000-177795556-355537778=6666\end{aligned}$$

したがって、$f(3333) > f(3334)$ であるから　$\therefore r = \dfrac{19999}{13333^2} = \dfrac{19999}{177768889}$

$f(0) = \dfrac{1}{10000}$，$f(10000) = \dfrac{40000}{20000^2} = \dfrac{1}{10000}$ より　$\therefore q = \dfrac{1}{10000}$

以上により　$\therefore r = \dfrac{19999}{177768889}$，$q = \dfrac{1}{10000}$　……(答)

(4)

$N = 10000m + k \ (m \geqq 1,\ 0 \leqq k \leqq 10000)$ のとき

$$p_N = (10000-k)\times\left(\frac{m}{10000m+k}\right)^2 + k\times\left(\frac{m+1}{10000m+k}\right)^2 = \frac{(10000-k)m^2 + k(m+1)^2}{(10000m+k)^2}$$

$$= \frac{10^4m^2 - km^2 + km^2 + 2km + k}{(10^4m+k)^2} = \frac{10^4m^2 + (2m+1)k}{(10^4m+k)^2}$$

$f(k) = \dfrac{10^4m^2 + (2m+1)k}{(10^4m+k)^2}$ とおくと

$$f'(k) = \frac{(2m+1)\cdot(10^4m+k)^2 - \left\{10^4m^2 + (2m+1)k\right\}\cdot 2(10^4m+k)}{(10^4m+k)^4} = \frac{(2m+1)\cdot(10^4m+k) - 2\left\{10^4m^2 + (2m+1)k\right\}}{(10^4m+k)^3}$$

$$= \frac{2\cdot10^4m^2 + 10^4m + (2m+1)k - 2\cdot10^4m^2 - 2(2m+1)k}{(10^4m+k)^3} = \frac{10^4m - (2m+1)k}{(10^4m+k)^3}$$

$0 \leqq k < \dfrac{10^4m}{2m+1}$ のとき $f'(k) > 0$　$\dfrac{10^4m}{2m+1} < k \leqq 10000$のとき $f'(k) < 0$

$$f\left(\frac{10^4m}{2m+1}\right) = \frac{10^4m^2 + 10^4m}{\left(10^4m + \dfrac{10^4m}{2m+1}\right)^2} = \frac{10^4m(m+1)}{10^8m^2\left(1 + \dfrac{1}{2m+1}\right)^2} = \frac{m+1}{10^4m\left(\dfrac{2m+2}{2m+1}\right)^2} = \frac{(m+1)(2m+1)^2}{4\cdot10^4m(m+1)^2}$$

$$= \frac{(2m+1)^2}{4\cdot10^4m(m+1)} = \frac{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2}{10^4m(m+1)} = \frac{m^2+m+\dfrac{1}{4}}{10^4m(m+1)} = \frac{1}{10000}\cdot\left\{1 + \frac{1}{4m(m+1)}\right\}$$

であり、$f(0) = \dfrac{1}{10000}$，$f(10000) = \dfrac{10^4(m+1)^2}{10^8(m+1)^2} = \dfrac{1}{10000}$ より

$$\therefore \frac{1}{10000} \leqq f(k) < \frac{1}{10000}\cdot\left\{1 + \frac{1}{4m(m+1)}\right\}$$

ここで、$\dfrac{1}{10000}\cdot\left\{1 + \dfrac{1}{4m(m+1)}\right\}$ は明らかに m に対して単調減少であり、m が大きくなるほど $f(k)$ の最大値が小さくなることがわかる。

$$r - \frac{1}{10000}\cdot\left\{1 + \frac{1}{4\cdot2\cdot(2+1)}\right\} = \frac{19999}{13333^2} - \frac{1}{10000}\cdot\frac{25}{24} = \frac{19999}{13333^2} - \frac{1}{400\cdot24} = \frac{(2\cdot10^4 - 1)\cdot9600 - 13333^2}{13333^2\cdot9600}$$

$$= \frac{192000000 - 9600 - 177768889}{13333^2\cdot9600} = \frac{14221511}{13333^2\cdot9600} > 0$$

$f(k)$ の最小値は m の値に関わらず $q = \dfrac{1}{10000}$ であるから　$\therefore q \leqq p_N \leqq r$　（証明終）