1997年東大理$\boxed{2}$

与式は　$m^2+m+\left(\dfrac{n^2}{2n+1}-m\right)a>0$——①　と表せる。①は任意の整数$m$について成立するから

$m=0,\ -1$とすると　$\dfrac{n^2}{2n+1}a>0,\ \left(\dfrac{n^2}{2n+1}+1\right)a>0$　nは正の整数より　$\therefore a>0$

$m\neq 0,\ -1$とすると　$\dfrac{n^2}{2n+1}=\dfrac{1}{4}\left(2n-1+\dfrac{1}{2n+1}\right)$は整数にならないので、$\dfrac{n^2}{2n+1}\neq m$である。

$\dfrac{n^2}{2n+1}-m>0$のとき、$a>0$であるから　$m^2+m+\left(\dfrac{n^2}{2n+1}-m\right)a>m^2+m>0$　したがって①は成立。

$\dfrac{n^2}{2n+1}-m<0$のとき　$m^2+m>\left(m-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)a$　$a<\dfrac{m^2+m}{m-\dfrac{n^2}{2n+1}}$——②　を満たす必要がある。

関数$f(m)=\dfrac{m^2+m}{m-\alpha}$の$m>\alpha$における増減を調べる。ただし、$\alpha=\dfrac{n^2}{2n+1}$は定数である。

$$f'(m)=\frac{(2m+1)(m-\alpha)-(m^2+m)}{(m-\alpha)^2}=\frac{m^2-2\alpha m-\alpha}{(m-\alpha)^2}$$

$$m^2-2\alpha m-\alpha=m^2-\frac{2n^2}{2n+1}m-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{(2n+1)m^2-2n^2m-n^2}{2n+1}=\frac{(m-n)\{(2n+1)m+n\}}{2n+1}$$

$n-\dfrac{n^2}{2n+1}=\dfrac{n(2n+1)-n^2}{2n+1}=\dfrac{n^2+n}{2n+1}>0$であるから、

$f(m)$の$m>\alpha$における増減は右の通りで、$m=n$において最小。

m	α	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(m)$		−	0	+
$f(m)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(n)=\frac{n^2+n}{n-\dfrac{n^2}{2n+1}}=\frac{(2n+1)(n^2+n)}{n(2n+1)-n^2}=\frac{(2n+1)(n^2+n)}{n^2+n}=2n+1$$

$\therefore a<2n+1$

以上により、求める範囲は　$\therefore 0<a<2n+1$ ……(答)