1997年東大理 $\boxed{3}$

(1)

$P(x,\ y,\ z)$ とすると、$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{PB}\right|$ より

$$(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-1)^2+z^2 \quad -2x=-2y \quad \therefore x=y$$

これより、$P(x,\ x,\ z)$ と置くと $\left|\overrightarrow{PA}\right|^2=\left|\overrightarrow{PB}\right|^2=2x^2-2x+1+z^2$

$r^2\left|\overrightarrow{PO}\right|^2=r^2(2x^2+z^2)$ より $\quad 2x^2-2x+1+z^2=r^2(2x^2+z^2) \quad 2(1-r^2)x^2-2x+1+(1-r^2)z^2=0$ ――①

①を x についての2次方程式と見て、実数解を持つ条件は

$$D/4=1-2(1-r^2)\left\{1+(1-r^2)z^2\right\}=1-2(1-r^2)-2(1-r^2)^2z^2=2r^2-1-2(1-r^2)^2z^2\geqq 0$$

$$\therefore 2r^2-1\geqq 2(1-r^2)^2z^2\geqq 0$$

したがって、$2r^2-1\geqq 0$ でなければならないから $\quad r^2\geqq\dfrac{1}{2} \quad \therefore \dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq r<1$ ……(答)

(2)

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-2x(1-x)+z^2=2x^2-2x+z^2=\left|\overrightarrow{PA}\right|^2-1=r^2\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-1=r^2(2x^2+z^2)-1$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq r<1$ の条件下で $\quad 0\leqq z^2\leqq\dfrac{2r^2-1}{2(1-r^2)^2}$ ――②

z を固定して①を解くと $\quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{2r^2-1-2(1-r^2)^2z^2}}{2(1-r^2)}$

$$x^2=\frac{2r^2-2(1-r^2)^2z^2\pm 2\sqrt{2r^2-1-2(1-r^2)^2z^2}}{4(1-r^2)^2}=\frac{r^2\pm\sqrt{2r^2-1-2(1-r^2)^2z^2}}{2(1-r^2)^2}-\frac{z^2}{2}$$

$2x^2+z^2=\dfrac{r^2\pm\sqrt{2r^2-1-2(1-r^2)^2z^2}}{(1-r^2)^2}$ $\quad$ ②より $\quad \therefore \dfrac{r^2-\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}\leqq 2x^2+z^2\leqq\dfrac{r^2+\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}$

したがって $\quad M(r)=r^2\cdot\dfrac{r^2+\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}-1,\ m(r)=r^2\cdot\dfrac{r^2-\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}-1 \quad M(r)-m(r)=\dfrac{2r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}$

$(1-r)^2\left\{M(r)-m(r)\right\}=\dfrac{2r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1+r)^2} \quad \therefore \displaystyle\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\left\{M(r)-m(r)\right\}=\dfrac{2\sqrt{2-1}}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$ ……(答)