1997 年東大理 $\boxed{5}$

対称性から第 1 象限について考える。

$y \leqq \sqrt{x^2(1-x^2)-a} = \sqrt{-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}-a}$　　$f(x)=\sqrt{-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}-a}$ とすると

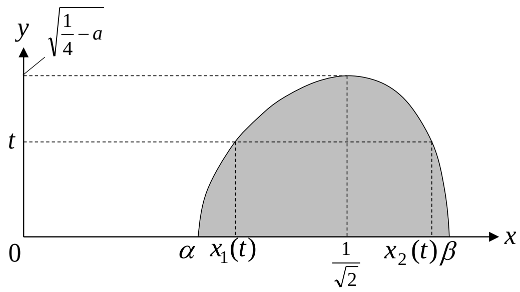
$-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}-a \geqq 0$ より　$\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-a} \leqq x^2 \leqq \dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}$　　$\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{-2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\cdot 2x}{2\sqrt{-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-a}}=\frac{-2x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-a}}$$

x	α	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	β
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において最大値 $\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}$ をとる。

$y \leqq f(x)$ で表される領域の概形は右図の通り。



$0 \leqq y \leqq \sqrt{\dfrac{1}{4}-a}$ として、$y^2=x^2(1-x^2)-a$ を x について解くと

$$x^4-x^2+y^2+a=0$$

$$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1-4(y^2+a)}}{2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}$$

$x_1(y)=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-a-y^2}}$, $x_2(y)=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}-a-y^2}}$ とおくと、題意の回転体の $y=t\left(0\leqq t\leqq\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}\right)$ における

断面は、外径 $x_2(t)$、内径 $x_1(t)$ のドーナツ型であり、その面積は $\pi\left\{(x_2(t))^2-(x_1(t))^2\right\}$ で与えられるから

$\pi\left\{(x_2(y))^2-(x_1(y))^2\right\}=2\pi\sqrt{\dfrac{1}{4}-a-y^2}$　　求める体積は　$4\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}\,dy$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}\,dy$ は、半径 $\sqrt{\dfrac{1}{4}-a}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ であるから

求める体積は　$\therefore 4\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}-a\right)\dfrac{\pi}{4}=\left(\dfrac{1}{4}-a\right)\pi^2$　……(答)