1997年東大理$\boxed{6}$　※2021. 4. 17 修正しました。

(1)

$y=\dfrac{8}{27}x^3$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{8}{27}t^3\right)$ における接線は　$y=\dfrac{8}{9}t^2(x-t)+\dfrac{8}{27}t^3=\dfrac{8}{9}t^2x-\dfrac{16}{27}t^3$

これが $y=(x+a)^2$ に接するとき

$(x+a)^2=\dfrac{8}{9}t^2x-\dfrac{16}{27}t^3$　　$x^2+\left(2a-\dfrac{8}{9}t^2\right)x+a^2+\dfrac{16}{27}t^3=0$

$D/4=\left(a-\dfrac{4}{9}t^2\right)^2-a^2-\dfrac{16}{27}t^3=-\dfrac{8}{9}at^2+\dfrac{16}{81}t^4-\dfrac{16}{27}t^3=0$

$2t^4-6t^3-9at^2=0$　　$\therefore t^2(2t^2-6t-9a)=0$ ——①

①が $t=0$ 以外の実数解を 2 つ持つとき、$2t^2-6t-9a=0$ が相違なる 2 つの実数解を持つので

$D/4=9+18a>0$　　$\therefore a>-\dfrac{1}{2}$

$a=0$ のとき、$2t^2-6t-9a=0$ は $t=0$ を解に持つ。したがって $a\neq 0$ であるから

$\therefore -\dfrac{1}{2}<a<0,\ 0<a$　……(答)

(2)
(解答 1)

$-\dfrac{1}{2}<a<0,\ 0<a$ のとき、$2t^2-6t-9a=0$ の相違なる 2 つの実数解を、$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

解と係数の関係より　$\beta+\alpha=3,\ \beta\alpha=-\dfrac{9}{2}a$

このとき、x 軸以外の 2 本の接線は　$y=\dfrac{8}{9}\alpha^2x-\dfrac{16}{27}\alpha^3,\ y=\dfrac{8}{9}\beta^2x-\dfrac{16}{27}\beta^3$

これら 2 本の接線の交点の x 座標を求める。

$\dfrac{8}{9}\alpha^2x-\dfrac{16}{27}\alpha^3=\dfrac{8}{9}\beta^2x-\dfrac{16}{27}\beta^3$　　$3(\beta^2-\alpha^2)x-2(\beta^3-\alpha^3)=0$　　$(\beta-\alpha)\left\{3(\beta+\alpha)x-2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)\right\}=0$

$\beta\neq\alpha$ より　$3(\beta+\alpha)x-2(\beta+\alpha)^2+2\beta\alpha=0$　　$\therefore x=\dfrac{2}{3}\left\{(\beta+\alpha)-\dfrac{\beta\alpha}{\beta+\alpha}\right\}=\dfrac{2}{3}\left(3+\dfrac{3}{2}a\right)=a+2$

$y=(x+a)^2$ と $y=\dfrac{8}{9}\alpha^2x-\dfrac{16}{27}\alpha^3$ の接点の x 座標を求める。$2\alpha^2-6\alpha-9a=0$ より、$\alpha^2=\dfrac{9}{2}a+3\alpha$ であるから

$(x+a)^2-\dfrac{8}{9}\alpha^2x+\dfrac{16}{27}\alpha^3=x^2+2ax+a^2-\left(4a+\dfrac{8}{3}\alpha\right)x+\left(\dfrac{8}{9}a\alpha+\dfrac{16}{9}\alpha^2\right)=x^2-\left(2a+\dfrac{8}{3}\alpha\right)x+\left(a+\dfrac{4}{3}\alpha\right)^2=0$

$\left\{x-\left(a+\dfrac{4}{3}\alpha\right)\right\}^2=0$　　$\therefore x=a+\dfrac{4}{3}\alpha$

同様に、$y=(x+a)^2$ と $y=\frac{8}{9}\beta^2x-\frac{16}{27}\beta^3$ の接点の x 座標は　$\therefore x=a+\frac{4}{3}\beta$

求める面積は

$$\int_{a+\frac{4}{3}\alpha}^{a+2}\left\{(x+a)^2-\left(\frac{8}{9}\alpha^2x-\frac{16}{27}\alpha^3\right)\right\}dx+\int_{a+2}^{a+\frac{4}{3}\beta}\left\{(x+a)^2-\left(\frac{8}{9}\beta^2x-\frac{16}{27}\beta^3\right)\right\}dx$$

$$=\int_{a+\frac{4}{3}\alpha}^{a+2}\left\{x-\left(a+\frac{4}{3}\alpha\right)\right\}^2dx+\int_{a+2}^{a+\frac{4}{3}\beta}\left\{x-\left(a+\frac{4}{3}\beta\right)\right\}^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left\{x-\left(a+\frac{4}{3}\alpha\right)\right\}^3\right]_{a+\frac{4}{3}\alpha}^{a+2}+\left[\frac{1}{3}\left\{x-\left(a+\frac{4}{3}\alpha\right)\right\}^3\right]_{a+2}^{a+\frac{4}{3}\beta}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)-\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)\right\}\left\{\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)^2+\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)+\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)^2\right\}$$

$$=\frac{4}{9}(\beta-\alpha)\left\{12-\frac{16}{3}(\beta+\alpha)+\frac{16}{9}(\beta^2+\alpha^2)-\frac{8}{3}(\beta+\alpha)+\frac{16}{9}\beta\alpha\right\}$$

$$=\frac{4}{9}(\beta-\alpha)\left\{12-8(\beta+\alpha)+\frac{16}{9}(\beta+\alpha)^2-\frac{16}{9}\beta\alpha\right\}$$

ここで、$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\beta\alpha=9+18a$ より　$\therefore \beta-\alpha=3\sqrt{1+2a}$

$$\frac{4}{9}(\beta-\alpha)\left\{12-8(\beta+\alpha)+\frac{16}{9}(\beta+\alpha)^2-\frac{16}{9}\beta\alpha\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{1+2a}(12-24+16+8a)=\frac{4}{3}(4+8a)\sqrt{1+2a}=\frac{16}{3}(1+2a)^{\frac{3}{2}}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(解答 2)

$y=(x+a)^2$ と、2 本の接線 $y=\frac{8}{9}\alpha^2x-\frac{16}{27}\alpha^3$, $y=\frac{8}{9}\beta^2x-\frac{16}{27}\beta^3$ の接点の座標、および 2 本の接線の交点を求めるところまで(解答 1)と同じ。

一般に、$y=x^2$ 上の点 $(x_1,\ {x_1}^2)$, $(x_2,\ {x_2}^2)$ $(x_1<x_2)$ における接線を、それぞれ l_1, l_2 とする。
$y=x^2$ と l_1, l_2 で囲まれた部分の面積 S を考える。
l_1 の式は　$y=2x_1(x-x_1)+{x_1}^2=2x_1x-{x_1}^2$　同様に、l_2 の式は　$y=2x_2x-{x_2}^2$

l_1, l_2 の交点の x 座標は　$2x_1x-{x_1}^2=2x_2x-{x_2}^2$　$2(x_2-x_1)x={x_2}^2-{x_1}^2$　$\therefore x=\frac{x_2+x_1}{2}$

$$\therefore S=\int_{x_1}^{\frac{x_2+x_1}{2}}\left\{x^2-(2x_1x-{x_1}^2)\right\}dx+\int_{\frac{x_2+x_1}{2}}^{x_2}\left\{x^2-(2x_2x-{x_2}^2)\right\}dx$$

$$=\int_{x_1}^{\frac{x_2+x_1}{2}}(x-x_1)^2dx+\int_{\frac{x_2+x_1}{2}}^{x_2}(x-x_2)^2dx=\left[\frac{(x-x_1)^3}{3}\right]_{x_1}^{\frac{x_2+x_1}{2}}+\left[\frac{(x-x_2)^3}{3}\right]_{\frac{x_2+x_1}{2}}^{x_2}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)^3}{12}$$

$y=(x+a)^2$ および 2 本の接線 $y=\frac{8}{9}\alpha^2x-\frac{16}{27}\alpha^3,\ y=\frac{8}{9}\beta^2x-\frac{16}{27}\beta^3$ を、x 方向に a 平行移動すると、

接点の x 座標 $a+\frac{4}{3}\alpha,\ a+\frac{4}{3}\beta$ は、それぞれ $2a+\frac{4}{3}\alpha,\ 2a+\frac{4}{3}\beta$ に移る。

また、$\frac{1}{2}\left(2a+\frac{4}{3}\alpha+2a+\frac{4}{3}\beta\right)=2a+\frac{2}{3}(\alpha+\beta)=2a+2$ であり、2 本の接線の交点の x 座標 $a+2$ を a 平行移動した値に等しい。

したがって、$x_1=2a+\frac{4}{3}\alpha,\ x_2=2a+\frac{4}{3}\beta$ とすれば、求める面積は　$\frac{1}{12}\left\{\frac{4}{3}(\beta-\alpha)\right\}^3=\frac{16}{81}(\beta-\alpha)^3$

ここで、$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\beta\alpha=9+18a$ より　$\therefore\ \beta-\alpha=3\sqrt{1+2a}$

求める面積は　$\therefore\ \frac{16}{81}\cdot 27(1+2a)^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}(1+2a)^{\frac{3}{2}}$　……(答)