1998 年東大文 $\boxed{4}$

(1)

△ ABC の重心 G_1 の座標は $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$ であり、D の座標は $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ d\right)$ $(d>0)$ とおける。

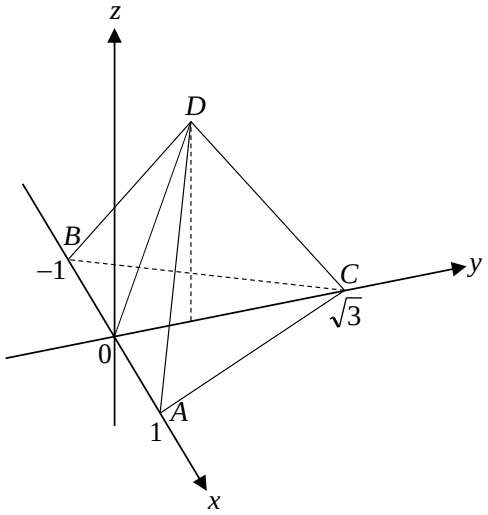
$$AD^2 = 1 + \frac{1}{3} + d^2 = 2^2 \quad d^2 = \frac{8}{3} \quad \therefore d = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$D\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ より、△ ABD の重心 G_2 の座標は $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

求める点 E は、G_2 に関して C と対称である。

$\overrightarrow{CG_2} = \left(0,\ -\frac{8\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$ であり、$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CG_2}$ より

$$\therefore E\left(0,\ -\frac{7\sqrt{3}}{9},\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$



(2)

直線 ED の傾きは $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \div \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

直線 ED の式は $x = 0,\ z = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{5}y + \frac{3\sqrt{6}}{5}$

直線 ED と xz 平面との交点 F は $\left(0,\ 0,\ \frac{3\sqrt{6}}{5}\right)$

△ ABF の面積は $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{5} = \frac{3\sqrt{6}}{5}$ 点 E と xz 平面との距離は $\frac{7\sqrt{3}}{9}$

求める体積は、四面体 $ABFE$ の体積に等しいから $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{9} = \frac{7\sqrt{2}}{15}$ ……(答)