1998 年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

C_1 上の点 Q を $(\cos a,\ 10+\sin a)$ 、 C_2 上の点 R を $(2\cos b,\ 2\sin b)$ 、点 S を $(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{RQ}=(\cos a-2\cos b,\ 10+\sin a-2\sin b)$ 、 $\overrightarrow{RS}=(x-2\cos b,\ y-2\sin b)$ であり、

$\overrightarrow{RS}$ は $\overrightarrow{RQ}$ を $+\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転したものに一致するから、

$$\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}0 & \mp1\\ \pm1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a-2\cos b\\ 10+\sin a-2\sin b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mp10\mp\sin a\pm2\sin b\\ \pm\cos a\mp2\cos b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\cos b\\ y-2\sin b\end{pmatrix}\quad\text{（複号同順）}$$

$$\therefore\begin{cases}x-2\cos b\mp2\sin b\pm10=\mp\sin a\\ y-2\sin b\pm2\cos b=\pm\cos a\end{cases}$$

これより

$$\therefore(x-2\cos b\mp2\sin b\pm10)^2+(y-2\sin b\pm2\cos b)^2=\sin^2 a+\cos^2 a=1 \quad ①$$

b を固定すると、①は半径 1 の円を表し、これを C_0 とする。C_0 の中心を $\begin{cases}p=2\cos b\pm2\sin b\mp10\\ q=2\sin b\mp2\cos b\end{cases}$ とおく。

$p=2\cos b+2\sin b-10,\ q=2\sin b-2\cos b$ のとき

$$p+10=2\cos b+2\sin b=2\sqrt{2}\cos\left(b-\frac{\pi}{4}\right)\quad q=2\sin b-2\cos b=2\sqrt{2}\sin\left(b-\frac{\pi}{4}\right)\quad\therefore(p+10)^2+q^2=8$$

$p=2\cos b-2\sin b+10,\ q=2\sin b+2\cos b$ のとき

$$p-10=2\cos b-2\sin b=2\sqrt{2}\cos\left(b+\frac{\pi}{4}\right)\quad q=2\sin b+2\cos b=2\sqrt{2}\sin\left(b+\frac{\pi}{4}\right)\quad\therefore(p-10)^2+q^2=8$$

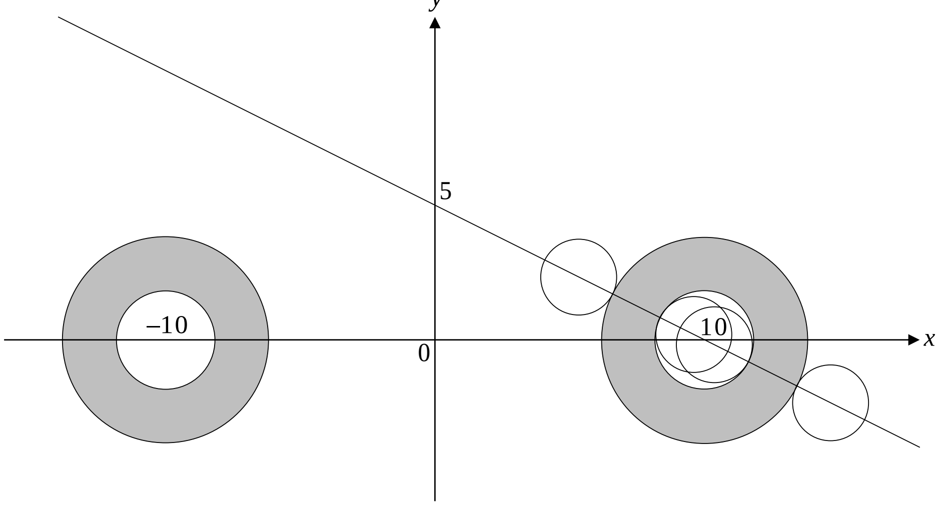
したがって、b を動かすと、C_0 の中心は半径 $2\sqrt{2}$ の円 $(x+10)^2+y^2=8$ または $(x-10)^2+y^2=8$ 上を動く。
以上により、点 S の軌跡は

$$\therefore(2\sqrt{2}-1)^2\leqq(x+10)^2+y^2\leqq(2\sqrt{2}+1)^2,\ (2\sqrt{2}-1)^2\leqq(x-10)^2+y^2\leqq(2\sqrt{2}+1)^2\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

(2)

(1) で求めた点 S の軌跡と、円 C_3 がただ 1 つの共有点を持つ。

図より、 C_3 が円 $(x-10)^2+y^2=(2\sqrt{2}+1)^2$ に外接するか、 C_3 が円 $(x-10)^2+y^2=(2\sqrt{2}-1)^2$ に内接するかのいずれかであるから、 $P_3(10-2t,\ t)$ とおくと



C_3が円 $(x-10)^2+y^2=(2\sqrt{2}+1)^2$ に外接するとき

$$\{(10-2t)-10\}^2+t^2=5t^2=\{\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+1)\}^2=(3\sqrt{2}+1)^2 \quad t^2=\frac{(3\sqrt{2}+1)^2}{5} \quad t=\pm\frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}=\pm\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore P_3\left(10\mp\frac{6\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{5},\ \pm\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{5}}{5}\right)$$

C_3が円 $(x-10)^2+y^2=(2\sqrt{2}-1)^2$ に内接するとき

$$\{(10-2t)-10\}^2+t^2=5t^2=\{(2\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}\}^2=(\sqrt{2}-1)^2 \quad t^2=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{5} \quad t=\pm\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}=\pm\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore P_3\left(10\mp\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{5},\ \pm\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5}\right)$$

以上により、求める P_3 の座標は

$$\therefore \left(10\mp\frac{6\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{5},\ \pm\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{5}}{5}\right), \left(10\mp\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{5},\ \pm\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5}\right)$$ （複号同順）……（答）