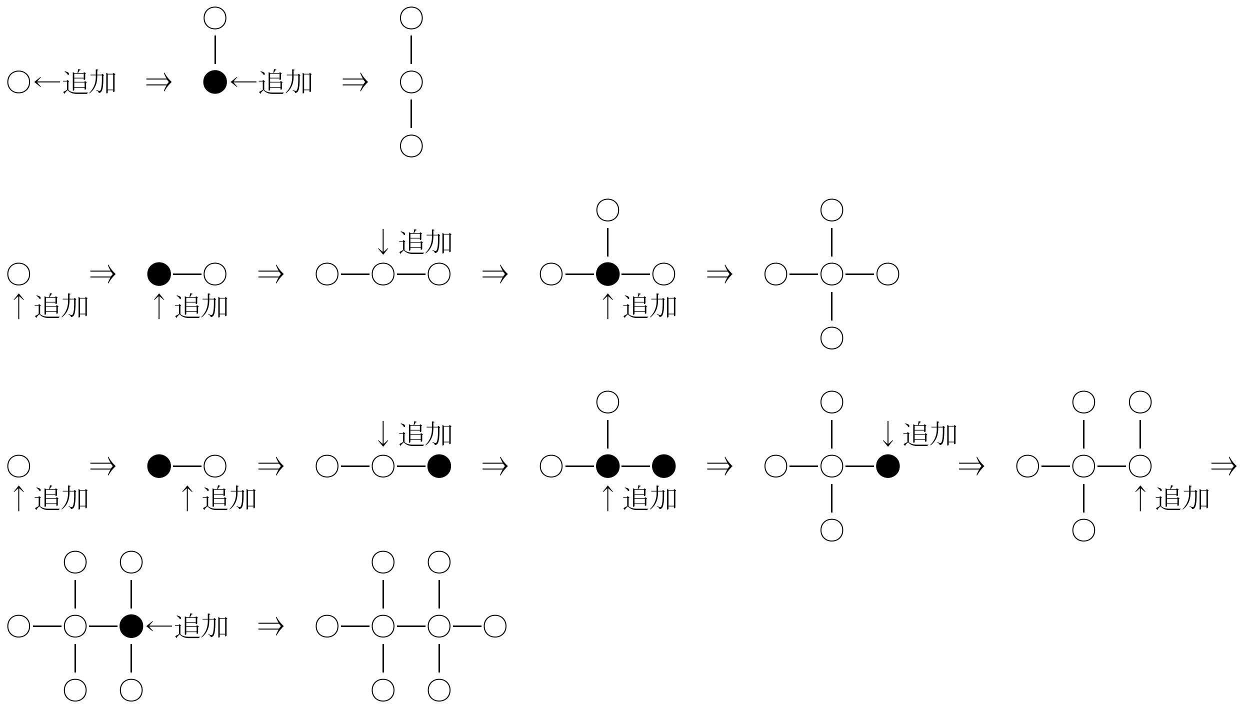
1998年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)



(2)

白頂点が横にn個並んだ棒状グラフを、C_nと表すことにする。
下記 a)の通り、C_1, C_3, C_4は可能グラフであることがわかる。

a)

○ ⇒ ●—○ ⇒ ○—○—○

↑追加 ↑追加

○ ⇒ ●—○ ⇒ ●—●—○ ⇒ ○—○—○—○

↑追加 ↑追加 ↑追加

C_1に対し操作 1 を行うと、必ず白黒の並びになるから、C_2は可能グラフではない。
また、下記 b)の通り、C_kに対し 3 回操作を行うとC_{k+3}が作れることがわかる。

b)

C_k ⋯—○—○ ⇒ ⋯—○—●—○ ⇒ ⋯—○—●—●—○ ⇒ C_{k+3} ⋯—○—○—○—○—○

↑追加 ↑追加 ↑追加

したがって、C_kが可能グラフであるとき、C_{k+3}も可能グラフである。C_1, C_3, C_4が可能グラフであるから、以下帰納的に、$C_3, C_6, C_9, \cdots$および$C_1, C_4, C_7, \cdots$は可能グラフであることがわかる。
$n = 3m(m \geqq 1), 3m + 1(m \geqq 0)$のとき、$C_n$は可能グラフであることが示された。

$n=3m+2(m\geqq 0)$のときを考える。
棒状グラフの途中の頂点に対し操作 1 を行うと、グラフは分岐し、以後分岐した部分は消えないので、操作 1 は棒状グラフの両端の頂点に対してのみ行うとする。
C_1を出発点として、操作 2 または両端の頂点に対する操作 1 を順次行ってできる棒状グラフを、$D_2,D_3,D_4,\cdots$ とする。また、C_1の両端に頂点を追加した拡張グラフ$C_1{}'$を定義する。両端に追加した頂点P_R,P_Lの色は、任意である。$C_1{}'$を出発点とし、操作 2 のみを行って順次できる棒状グラフを、$D_2',D_3',D_4',\cdots$とし、両端の頂点は常にP_R,P_Lと表す。このとき、$D_2,D_3,D_4,\cdots$の両端の頂点に対し行う操作 1 は、$D_2',D_3',D_4',\cdots$のP_Rの左の辺、またはP_Lの右の辺に対し行う操作 2 に置き換えることができる。P_R,P_Lの色に関係なく、$D_2',D_3',D_4',\cdots$からP_R,P_Lを除いたグラフは、$D_2,D_3,D_4,\cdots$に一致する。

拡張棒状グラフ$D_2',D_3',D_4',\cdots$において、黒頂点で仕切られた白頂点群の連続数を、左端から順に$w_0,w_1,w_2,\cdots$と定義する。左端が黒頂点であれば、$w_0=0$とする。右端についても同様である。黒頂点が連続している箇所では、黒頂点の間の白頂点群の連続数は0と考える。こうして得られた$w_0,w_1,w_2,\cdots$について、

$$S_n=w_0-w_1+w_2-w_3+\cdots=\sum_k(-1)^k\cdot w_k$$

とする。ある辺に対し操作 2 を行ったとき、S_nがどう変化するか調べる。以下、kを偶数とすると

ｉ）新たに操作 2 を行う辺の両端が、白頂点であるとき

w_k=4　　　　　　　　　　w_k=1　w_{k+1}=1　w_{k+2}=1
…—●—○—○—○—○—●—…　⇒　…—●—○—●—○—●—○—●—…
↑追加

黒頂点が 2 個増え、白頂点の群が 2 つ増える。個数 0 の白頂点の群ができる場合も含む。
操作前の$w_{k+1},w_{k+2},w_{k+3},\cdots$は、操作後に$w_{k+3},w_{k+4},w_{k+5},\cdots$となるが、順番の奇偶と値に変化はない。
操作前　$w_k=4$　操作後　$w_k-w_{k+1}+w_{k+2}=1-1+1=1$　より、S_nは操作前より3減る。

ｉｉ）新たに操作 2 を行う辺の両端が、黒頂点であるとき

w_k=1　w_{k+1}=0　w_{k+2}=1　　　　　　w_k=5
…—●—○—●—●—○—●—…　⇒　…—●—○—○—○—○—○—●—…
↑追加

黒頂点が 2 個減り、白頂点の群が 2 つ減る。減った白頂点の群には、個数 0 の白頂点の群を含む。
操作前の$w_{k+3},w_{k+4},w_{k+5},\cdots$は、操作後に$w_{k+1},w_{k+2},w_{k+3},\cdots$となるが、順番の奇偶と値に変化はない。
操作前　$w_k-w_{k+1}+w_{k+2}=1-0+1=2$　操作後　$w_k=5$　より、S_nは操作前より3増える。

ｉｉｉ）新たに操作 2 を行う辺の両端が、白頂点と黒頂点であるとき

w_k=2　w_{k+1}=1　　　　　　w_k=1　w_{k+1}=3
…—●—○—○—●—○—●—…　⇒　…—●—○—●—○—○—○—●—…
↑追加

w_k=1　w_{k+1}=2　　　　　　w_k=3　w_{k+1}=1
…—●—○—●—○—○—●—…　⇒　…—●—○—○—○—●—○—●—…
↑追加

黒頂点の個数は変わらず、白頂点の群の個数も変わらない。
操作前後で$w_{k+2}, w_{k+3}, w_{k+4}, \cdots$の順番の奇偶と値に変化はない。
上の場合　操作前 $w_k - w_{k+1} = 2 - 1 = 1$　操作後 $w_k - w_{k+1} = 1 - 3 = -2$　より、S_nは操作前より3減る。
下の場合　操作前 $w_k - w_{k+1} = 1 - 2 = -1$　操作後 $w_k - w_{k+1} = 3 - 1 = 2$　より、S_nは操作前より3増える。

新たに操作２を行うことにより、黒頂点の個数は、2増えるか、2減るか、変わらないかのいずれかである。
すなわち、新たに操作２を行っても、黒頂点の個数の奇偶に変化はない。
また、新たに操作２を行うことにより、S_nの値は、3増えるか、3減る。すなわち、新たに操作２を行っても、S_nを3で割った余りに変化はない。

以上の議論を踏まえて、$C_1{}'$を出発点として、拡張棒状グラフ$D_{3m+2}{}'$の両端を除く$3m+2$個の頂点すべてを、白にすることができるか考える。

ｉ）$C_1{}'$の両端の頂点が白であるとき　〇―〇―〇　$S_1 = 3 \equiv 0 \pmod 3$
$D_{3m+2}{}'$の両端を除く$3m+2$個の頂点すべてが白であるとき、黒頂点の個数の奇遇は変わらないから、$D_{3m+2}{}'$の両端の頂点は、ともに白か、ともに黒である。

$D_{3m+2}{}'$　〇―〇―〇―…―〇―〇―〇　$S_{3m+2} = 3m + 4 \equiv 1 \pmod 3$
$D_{3m+2}{}'$　●―〇―〇―…―〇―〇―●　$S_{3m+2} = 0 - (3m+2) + 0 = -3m - 2 \equiv 1 \pmod 3$
いずれにしても、S_nを3で割った余りが一致しない。

ｉｉ）$C_1{}'$の両端の頂点が黒であるとき　●―〇―●　$S_1 = 0 - 1 + 0 = -1 \equiv 2 \pmod 3$
ｉ）と同様に、$D_{3m+2}{}'$の両端の頂点は、ともに白か、ともに黒であるが、S_nを3で割った余りが一致しない。

ｉｉｉ）$C_1{}'$の両端の頂点が白と黒であるとき
〇―〇―●　$S_1 = 2 - 0 \equiv 2 \pmod 3$　●―〇―〇　$S_1 = 0 - 2 = -2 \equiv 1 \pmod 3$

$D_{3m+2}{}'$の両端を除く$3m+2$個の頂点すべてが白であるとき、$D_{3m+2}{}'$の両端の頂点は、白と黒である。

$D_{3m+2}{}'$　〇―〇―〇―…―〇―〇―●　$S_{3m+2} = 3m + 3 - 0 = 3m + 3 \equiv 0 \pmod 3$
$D_{3m+2}{}'$　●―〇―〇―…―〇―〇―〇　$S_{3m+2} = 0 - (3m+3) = -3m - 3 \equiv 0 \pmod 3$
いずれにしても、S_nを3で割った余りが一致しない。

以上により、$C_1{}'$を出発点として、拡張棒状グラフ$D_{3m+2}{}'$の両端を除く$3m+2$個の頂点すべてが、白になることはない。したがって、C_1を出発点として、C_{3m+2}を作ることはできないから、C_{3m+2}は可能グラフではない。

C_nが可能グラフであるための必要十分条件は、nを3で割った余りが0か1であること。……(答)

※数学的な厳密解と言えるのかは自信がありません。