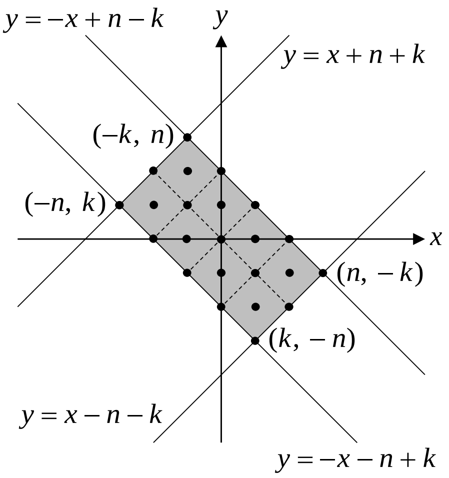
1998 年東大理$\boxed{2}$　※2019. 5. 23 一部記述追加

条件より　$-n+z \leqq x+y \leqq n-z,\ -n-z \leqq x-y \leqq n+z$

このような $x,\ y$ が存在するには　$-n+z \leqq n-z,\ -n-z \leqq n+z$　$\therefore -n \leqq z \leqq n$ ――①

①の範囲で、$z=k\ (-n \leqq k \leqq n)$ と固定すると

$-x-n+k \leqq y \leqq -x+n-k$ ――②　$x-n-k \leqq y \leqq x+n+k$ ――③



$-n<z<n$ のとき、②、③が表す範囲は右図の通り。
格子点を頂点とし、一辺の長さ $\sqrt{2}$ である $(n+k)(n-k)$ 個の
正方形に分割して考える。
各正方形の頂点に当たる格子点の個数は

$(n+k+1)(n-k+1)$

また、各正方形の中央に、1 個の格子点が存在するから、
②、③を満たす格子点の個数は

$$(n+k+1)(n-k+1)+(n+k)(n-k)$$
$$=(n+1)^2-k^2+n^2-k^2=2n^2+2n+1-2k^2$$

これは $k=\pm n$ でも成立。

対称性により

$$f(n)=2n^2+2n+1+2\sum_{k=1}^{n}\left\{(2n^2+2n+1)-2k^2\right\}$$
$$=2n^2+2n+1+2n(2n^2+2n+1)-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{(2n+1)\left\{3(2n^2+2n+1)-2n(n+1)\right\}}{3}$$
$$=\frac{(2n+1)(6n^2+6n+3-2n^2-2n)}{3}=\frac{(2n+1)(4n^2+4n+3)}{3}$$

$$\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 4=\frac{8}{3}\quad \cdots\cdots (答)$$

※ $k=\pm n$ のとき、②、③が表す範囲は線分になる。