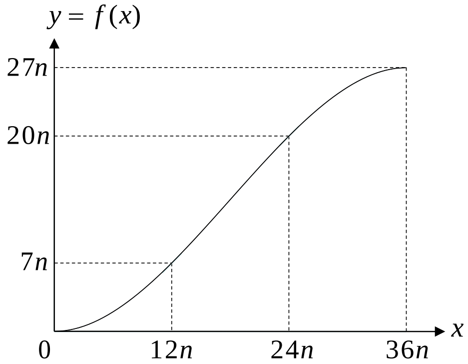
1998年東大理$\boxed{4}$

$f(x)=\dfrac{x^2(2\cdot3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}$　$f'(x)=\dfrac{2x(2\cdot3^3\cdot n-x)-x^2}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=\dfrac{x\{(2^2\cdot3^3\cdot n-2x)-x\}}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=\dfrac{x(2^2\cdot3^2\cdot n-x)}{2^5\cdot3^2\cdot n^2}$

$f''(x)=\dfrac{(2^2\cdot3^2\cdot n-x)-x}{2^5\cdot3^2\cdot n^2}=\dfrac{2\cdot3^2\cdot n-x}{2^4\cdot3^2\cdot n^2}$

増減およびグラフは下の通りで、$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 36n$ で単調増加、$x=18n$ で変曲点を持つ。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$18n$	$\cdots$	$36n$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘



$f(x+1)-f(x)\geqq 1$ であるとき、すなわち2点 $(x,\ f(x)),\ (x+1,\ f(x+1))$ を通る直線の傾きが1以上であるとき、$[f(x+1)]\neq[f(x)]$ となる。$f'(x)\geqq 1$ とすると、

$x(2^2\cdot3^2\cdot n-x)\geqq 2^5\cdot3^2\cdot n^2$　$x^2-36nx+288n^2\leqq 0$　$(x-12n)(x-24n)\leqq 0$　$\therefore 12n\leqq x\leqq 24n$

ここで、

$f(0)=0$　$f(36n)=\dfrac{2^4\cdot3^4\cdot n^2(2\cdot3^3\cdot n-2^2\cdot3^2\cdot n)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=3^3(3-2)n=27n$

$f(12n)=\dfrac{2^4\cdot3^2\cdot n^2(2\cdot3^3\cdot n-2^2\cdot3\cdot n)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=(3^2-2)n=7n$

$f(24n)=\dfrac{2^6\cdot3^2\cdot n^2(2\cdot3^3\cdot n-2^3\cdot3\cdot n)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=2^2(3^2-2^2)n=20n$

であるから、k を整数として

i）$12n\leqq k\leqq 18n-1$ のとき

下に凸かつ $f'(k)\geqq 1$ より　$f(k+1)-f(k)>f'(k)\geqq 1$

$\therefore[f(k+1)]\neq[f(k)]$

$\therefore[f(12n)]\neq[f(12n+1)]\neq\cdots\neq[f(18n-1)]\neq[f(18n)]$

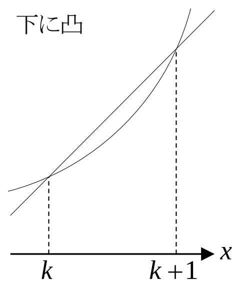
ii）$18n\leqq k\leqq 24n-1$ のとき

上に凸かつ $f'(k+1)\geqq 1$ より　$f(k+1)-f(k)>f'(k+1)\geqq 1$

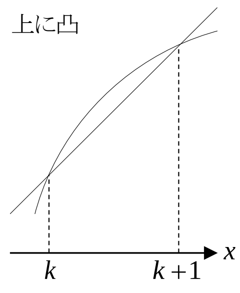
$\therefore[f(k+1)]\neq[f(k)]$

$\therefore[f(18n)]\neq[f(18n+1)]\neq\cdots\neq[f(24n-1)]\neq[f(24n)]$

下に凸



上に凸



i), ii) より、$12n+1$ 個の整数 $[f(12n)],\ [f(12n+1)],\ \cdots,\ [f(24n-1)],\ [f(24n)]$ は相違なる値である。

ｉｉｉ） $0 \leqq k \leqq 12n-1$ のとき

下に凸かつ $f'(k+1) \leqq 1$ より　$f(k+1)-f(k) < f'(k+1) \leqq 1$

$\left[f(k+1)\right]=\left[f(k)\right]$ または $\left[f(k+1)\right]=\left[f(k)\right]+1$ となるから、 $f(12n)=7n$ より、

$12n$ 個の整数 $\left[f(0)\right], \left[f(1)\right], \cdots, \left[f(12n-1)\right]$ の中には、 0 から $7n-1$ までの $7n$ 個の整数すべてが含まれる。

ｉｖ） $24n \leqq k \leqq 36n-1$ のとき

上に凸かつ $f'(k) \leqq 1$ より　$f(k+1)-f(k) < f'(k) \leqq 1$

$\left[f(k+1)\right]=\left[f(k)\right]$ または $\left[f(k+1)\right]=\left[f(k)\right]+1$ となるから、 $f(24n)=20n$ より、

$12n$ 個の整数 $\left[f(24n+1)\right], \left[f(24n+2)\right], \cdots, \left[f(36n)\right]$ の中には、 $20n+1$ から $27n$ までの $7n$ 個の整数すべてが含まれる。

以上により、 $36n+1$ 個の整数 $\left[f(0)\right], \left[f(1)\right], \left[f(2)\right], \cdots, \left[f(36n)\right]$ のうち、相違なるものの個数は

$\therefore (12n+1)+7n+7n=26n+1$ ……（答）

※2013 年名古屋大理系 $\boxed{2}$ は本問に類似。