1998 年東大理 $\boxed{5}$　※2023. 8. 21 修正

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{OQ_n}=x_n\cos\theta+y_n\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ_n}&=(x_n,\ y_n)-(x_n\cos\theta+y_n\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=(x_n-x_n\cos^2\theta-y_n\sin\theta\cos\theta,\ y_n-x_n\sin\theta\cos\theta-y_n\sin^2\theta)\\&=(x_n\sin^2\theta-y_n\sin\theta\cos\theta,\ -x_n\sin\theta\cos\theta+y_n\cos^2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\overrightarrow{OQ_n}&=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_n\sin^2\theta-y_n\sin\theta\cos\theta)+\frac{1}{2}(-x_n\sin\theta\cos\theta+y_n\cos^2\theta)\\&=\frac{1}{2}x_n(\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)+\frac{1}{2}y_n(\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

$n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=4x_n\sin^2\theta-4y_n\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}x_n(\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)-\sqrt{3}y_n(\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)\\&=x_n\sin^2\theta-y_n\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}x_n\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}y_n\cos^2\theta\\&=x_n(\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)-y_n(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=-4x_n\sin\theta\cos\theta+4y_n\cos^2\theta-x_n(\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)-y_n(\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)\\&=-3x_n\sin\theta\cos\theta+3y_n\cos^2\theta-\sqrt{3}x_n\sin^2\theta+\sqrt{3}y_n\sin\theta\cos\theta\\&=-\sqrt{3}x_n(\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)+\sqrt{3}y_n(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta)\end{aligned}$$

これより、$y_{n+1}=-\sqrt{3}x_{n+1}$ が成立し、$n\geqq 2$ のとき $y_n=-\sqrt{3}x_n$ であるから

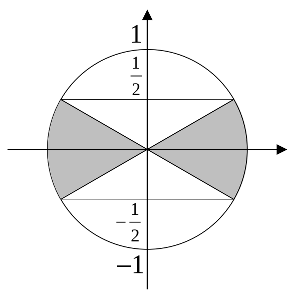
$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n(\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)+\sqrt{3}x_n(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta)\\&=(\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta)x_n=(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2x_n\end{aligned}$$

$n\geqq 2$ において、数列 $\{x_n\}$ は公比 $(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2$ の等比数列である。
また、$(x_1,\ y_1)=(1,\ 0)$ より、$x_2=\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$ であるから、
$\{x_n\}$ が収束する条件は　i)　$0\leqq(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2\leqq 1$　ii)　$x_2=0$　のいずれかである。
このとき、$\{y_n\}$ も収束するのは明らかである。

i)のとき　$-1\leqq\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\leqq 1$

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ より

$$\therefore -\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq\frac{1}{2}\quad\text{——①}$$



$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ より、①を満たす θ の範囲は

$$\frac{5}{6}\pi \leqq \theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{13}{6}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$$

ii)のとき

$\sin\theta=0$ または $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \therefore \theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi \quad \theta=\frac{2}{3}\pi$ は i)の範囲に含まれる。

以上により、$\{x_n\},\ \{y_n\}$ がともに収束する範囲は $\therefore \theta=0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$ ……(答)

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$ のとき $0\leqq(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2<1$ であるから $\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$

$\theta=0,\ \pi$ のとき $(x_2,\ y_2)=(0,\ 0)$ であるから $\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$

$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき $(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2=1$ であるから $\lim_{n\to\infty}x_n=x_2,\ \lim_{n\to\infty}y_n=-\sqrt{3}x_2$

$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ のとき $x_2=1 \quad \theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき $x_2=\frac{1}{4}-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$

以上まとめると

$\theta=0,\ \pi,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$ のとき $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$

$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ のとき $\lim_{n\to\infty}x_n=1,\ \lim_{n\to\infty}y_n=-\sqrt{3}$ ……(答)

$\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき $\lim_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$