1999 年東大文 $\boxed{2}$

$z=a+bi$ とすると

(a) より　$2z=2a+2bi,\ \dfrac{2}{z}=\dfrac{2}{a+bi}=\dfrac{2(a-bi)}{a^2+b^2}$ であるから、$2a,\ \dfrac{2a}{a^2+b^2}$ は整数。

(b) より　$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\geqq 1 \quad \therefore a^2+b^2\geqq 1$

$a=0$ のとき、$b^2\geqq 1$ であれば題意を満たす。　$\therefore b\leqq -1,\ 1\leqq b$

$2a=n\neq 0$ とおくと　$\left(\dfrac{2a}{a^2+b^2}\right)^2\leqq\left(\dfrac{2a}{a^2}\right)^2=\dfrac{4}{a^2}=\dfrac{16}{n^2} \quad \therefore \dfrac{2|a|}{a^2+b^2}\leqq\dfrac{4}{|n|}$

$\dfrac{4}{|n|}<1$ のとき、$\dfrac{2|a|}{a^2+b^2}<1$ であるから　$\dfrac{2|a|}{a^2+b^2}=0 \quad \therefore a=0 \quad n\neq 0$ であるから不適。

したがって $\dfrac{4}{|n|}\geqq 1$ であり　$|n|\leqq 4 \quad n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4$

$n=\pm 1$ のとき　$a=\pm\dfrac{1}{2} \quad b^2\geqq 1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{2|a|}{a^2+b^2}=\dfrac{4}{1+4b^2}\leqq 4$ より　$\dfrac{4}{1+4b^2}=1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad b^2=\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{12},\ 0$　適するのは　$b^2=\dfrac{3}{4} \quad \therefore b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$n=\pm 2$ のとき　$a=\pm 1 \quad a^2+b^2\geqq 1$ は任意の b について成立。

$\dfrac{2|a|}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{1+b^2}\leqq 2$ より　$\dfrac{2}{1+b^2}=1,\ 2 \quad b^2=1,\ 0 \quad \therefore b=\pm 1,\ 0$

$n=\pm 3$ のとき　$a=\pm\dfrac{3}{2} \quad a^2+b^2\geqq 1$ は任意の b について成立。

$\dfrac{2|a|}{a^2+b^2}=\dfrac{12}{9+4b^2}\leqq\dfrac{4}{3}$ より　$\dfrac{12}{9+4b^2}=1 \quad b^2=\dfrac{3}{4} \quad \therefore b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$n=\pm 4$ のとき　$a=\pm 2 \quad a^2+b^2\geqq 1$ は任意の b について成立。

$\dfrac{2|a|}{a^2+b^2}=\dfrac{4}{4+b^2}\leqq 1$ より　$\dfrac{4}{4+b^2}=1 \quad \therefore b=0$

以上をまとめると、$z=a+bi$ の存在範囲は

点 $\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (\pm 1,\ 0),\ (\pm 1,\ \pm 1),\ \left(\pm\dfrac{3}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (\pm 2,\ 0)$

および虚数軸上の $b\leqq -1,\ 1\leqq b$ の部分である。

図示すると右の通り。