1999年東大理後期 1

(1)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot n=n$ より　$\therefore c_n=n$　……(答)

(2)

$x\neq 0$ のとき

$$f_3(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\sin x}=\cos 2x+\frac{2\sin x\cos^2 x}{\sin x}=\cos 2x+2\cos^2 x=2\cos 2x+1$$

ここで $x=0$ とすると $f_3(0)=3$ となるから、$x=0$ でも成立。　$\therefore f_3(x)=2\cos 2x+1$

$$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_3(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2x+1)dx=\left[\sin 2x+x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$　……(答)

(3)

$x\neq 0$ のとき

$$f_{2n+3}(x)=\frac{\sin(2n+3)x}{\sin x}=\frac{\sin(2n+1)x\cos 2x+\cos(2n+1)x\sin 2x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(2n+1)x(1-2\sin^2 x)+2\cos(2n+1)x\sin x\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}+2\{\cos(2n+1)x\cos x-\sin(2n+1)x\sin x\}=f_{2n+1}(x)+2\cos 2(n+1)x$$

$f_{2n+1}(0)=2n+1$ であるから、$x=0$ でも成立。　$\therefore f_{2n+3}(x)=f_{2n+1}(x)+2\cos 2(n+1)x$

$$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+3}(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(n+1)x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx+\left[\frac{\sin 2(n+1)x}{n+1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx$$

したがって、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx$ は n の値に関わらず一定である。(2)より、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_3(x)dx=\pi$ がわかっているので

$$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx=\pi$$　……(答)