1999年東大理後期$\boxed{2}$

(1)

$x^2+y^2=1$に、$y=t(x+1)$を代入すると

$$x^2+t^2(x+1)^2=1 \quad (t^2+1)x^2+2t^2x+t^2-1=0 \quad (x+1)\{(t^2+1)x+t^2-1\}=0$$

$Q(t)$のx座標は$\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$。$Q(t)$のy座標は $t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad\therefore Q(t)\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ ……(答)

また、

$$\{Q(s)Q(t)\}^2=\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2s}{1+s^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)^2$$

$$=\frac{\{(1-s^2)(1+t^2)-(1-t^2)(1+s^2)\}^2+4\{s(1+t^2)-t(1+s^2)\}^2}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}$$

$$=\frac{(1-s^2+t^2-s^2t^2-1+t^2-s^2+s^2t^2)^2+4(s-t-s^2t+st^2)^2}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}$$

$$=\frac{4(t^2-s^2)^2+4(s-t)^2(1-st)^2}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}=\frac{4(t-s)^2(t+s)^2+4(s-t)^2(1-st)^2}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}$$

$$=\frac{4(t-s)^2\{(t+s)^2+(1-st)^2\}}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}=\frac{4(t-s)^2(t^2+2st+s^2+1-2st+s^2t^2)}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}$$

$$=\frac{4(t-s)^2(1+t^2+s^2+s^2t^2)}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}=\frac{4(t-s)^2(1+t^2)(1+s^2)}{(1+t^2)^2(1+s^2)^2}=\frac{4(t-s)^2}{(1+t^2)(1+s^2)}$$

$0<s<t$より $\quad\therefore Q(s)Q(t)=\dfrac{2(t-s)}{\sqrt{(1+t^2)(1+s^2)}}$ ……(答)

(2)

$s=\tan\alpha, t=\tan\beta$と表せる。$0<s<t$とすると、$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

倍角定理より $\quad \tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad\therefore s=\dfrac{2u}{1-u^2}$ $\quad\therefore 1+s^2=\dfrac{(1-u^2)^2+4u^2}{(1-u^2)^2}=\dfrac{1+2u^2+u^4}{(1-u^2)^2}=\left(\dfrac{1+u^2}{1-u^2}\right)^2$

同様に$t=\dfrac{2v}{1-v^2}$、$1+t^2=\left(\dfrac{1+v^2}{1-v^2}\right)^2$が導かれる。

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$より$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$で、$\tan\dfrac{\alpha}{2}<\tan\dfrac{\beta}{2}<1$、$u<v<1$であるから、(1)の結果に代入して

$$\therefore Q(s)Q(t)=2\left(\frac{2v}{1-v^2}-\frac{2u}{1-u^2}\right)\cdot\frac{1-v^2}{1+v^2}\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}=\frac{4\{v(1-u^2)-u(1-v^2)\}}{(1+v^2)(1+u^2)}=\frac{4(v-u)(1+uv)}{(1+v^2)(1+u^2)}$$

したがって、u,vがともに有理数ならば、$Q(s)Q(t)$も有理数である。(証明終)

(3)

$0 < u_k < 1\ (1 \leqq k \leqq n)$ を満たす任意の異なる有理数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ を考える。

このとき、傾き $s_k\ \ (1 \leqq k \leqq n)$ を $s_k = \dfrac{2u_k}{1-{u_k}^2}$ で定義する。

さらに、$x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $Q(s_k)\ \ (1 \leqq k \leqq n)$ を $Q(s_k)\left(\dfrac{1-{s_k}^2}{1+{s_k}^2}, \dfrac{2s_k}{1+{s_k}^2}\right)$ で定義する。

(1)、(2) の議論より、このようにして定めた n 個の点 $Q(s_1), Q(s_2), \cdots, Q(s_n)$ は、いずれも x 座標、 y 座標ともに有理数であり、どの異なる 2 点 $Q(s_i), Q(s_j)$ に対しても線分 $Q(s_i)\,Q(s_j)$ の長さは有理数であり、さらに、$Q(s_1), Q(s_2), \cdots, Q(s_n)$ は同一円上の点であるから、どの異なる 3 点も一直線上にない。

ここで、有理数とは既約分数で表せる数であり、分母の倍数をかければ整数になる。
今、n 個の点 $Q(s_1), Q(s_2), \cdots, Q(s_n)$ の x 座標および y 座標、$Q(s_1), Q(s_2), \cdots, Q(s_n)$ のうちいずれか 2 点を結んでできる ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 本の線分 $Q(s_i)\,Q(s_j)$ の長さの、分母に現れるすべての整数の最小公倍数を L とする。

$Q(s_1), Q(s_2), \cdots, Q(s_n)$ の x 座標、 y 座標に L をかけて得られる点を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とすると、
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ はいずれも x 座標、 y 座標ともに整数、すなわち格子点であり、
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ のどの異なる 3 点も一直線上になく、
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ のどの異なる 2 点 A_i, A_j に対しても、線分 A_iA_j の長さは整数である。

以上により、題意を満たす n 個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が存在することが示された。(証明終)