1999年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

OB_0, OP が x 軸となす角をそれぞれ α, β とすると、 $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}, \tan\beta = 3$ であるから

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6-1}{2+3} = 1 \quad \therefore \beta - \alpha = \angle B_0OP = \frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

$C_0(t, 3t)\ (0 < t \leqq 4)$ とおく。

$OA_0 : OB_0 = 1:4$ で、 $OD_0 : OC_0 = 1:4$ であるから、 $D_0\left(\dfrac{1}{4}t, \dfrac{3}{4}t\right)$ とおける。

$OB_0 = 4\sqrt{5}, OC_0 = \sqrt{10}\,t$ より、 $\dfrac{OC_0}{OB_0} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}t$ であるから、

K_n は、 n が 1 増加するごとに $\dfrac{\pi}{4}$ ずつ回転し、相似比 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}t$ で大きさが変わる。

$n > 0$ のとき　K_{n-1} は相似比 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}t$ で K_n に移り、面積は $\dfrac{t^2}{8}$ 倍になる。

$n < 0$ のとき　K_{n+1} は相似比 $\dfrac{4}{\sqrt{2}t}$ で K_n に移り、面積は $\dfrac{8}{t^2}$ 倍になる。

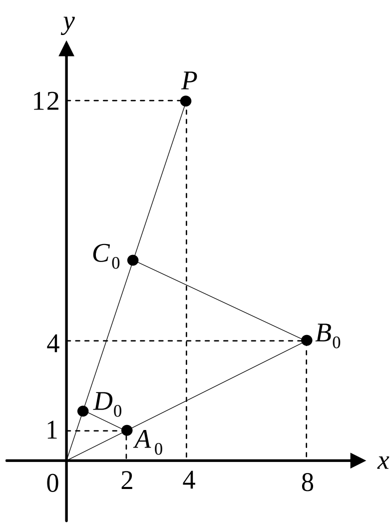
$\dfrac{t^2}{8} \neq 1$ のとき、 K_n の面積は n に対して単調増加または単調減少になるから、

ある 0 でない整数において $K_n = K_0$ となるには、 $\dfrac{t^2}{8} = 1$ 、すなわち相似比が 1 であるから　$\therefore t = 2\sqrt{2}$

C_0 の座標は　$\therefore (2\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$ $\cdots\cdots$(答)

このとき、 $OB_0 = OC_0 = 4\sqrt{5}, OA_0 = OD_0 = \sqrt{5}$ で、 K_0 は等脚台形である。

したがって、 $\dfrac{\pi}{4}$ ずつ回転し、1 周するごとに K_0 に一致するから、



求める n は　$\therefore n = 8m$ $\cdots\cdots$(答)
m は 0 でない整数である。

(3)

$n>0$ として、K_0 から出発して K_8 に至ったとき、K_0 と K_8 が 1 辺を共有していることが条件である。

このとき、座標平面はうず巻き状にすき間なく覆われる。

i)　B_8 が A_0 に一致

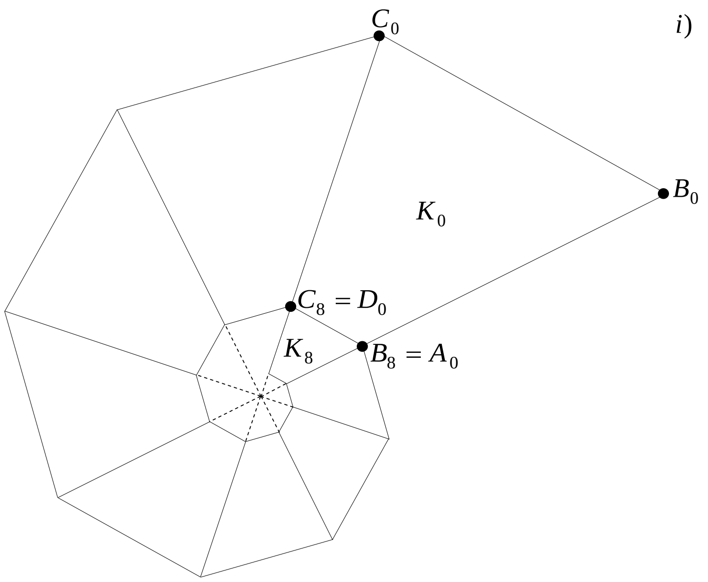
$\dfrac{OB_8}{OB_0}=\dfrac{1}{4}$ であるから　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}t\right)^8=\dfrac{1}{4}$　$t^8=4^5=2^{10}$　$t^4=2^5$　$t^2=4\sqrt{2}$　$\therefore t=2\sqrt[4]{2}$

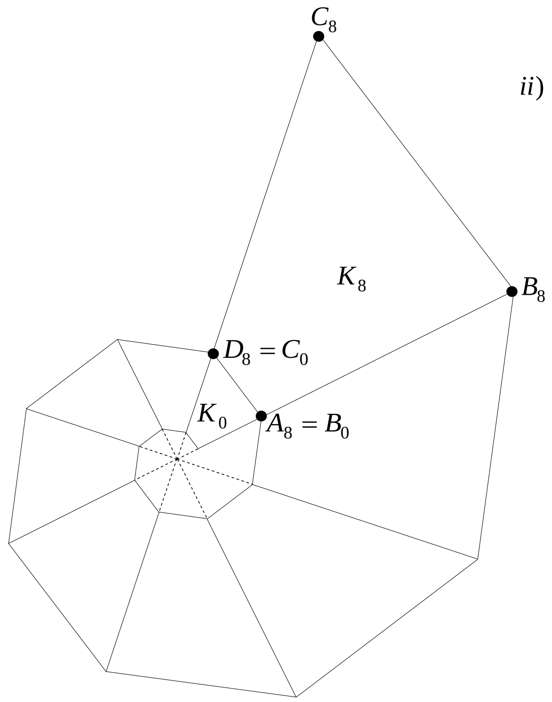
ii)　A_8 が B_0 に一致

$\dfrac{OB_8}{OB_0}=4$ であるから　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}t\right)^8=4$　$t^8=4^7=2^{14}$　$t^4=2^7$　$t^2=8\sqrt{2}$　$\therefore t=2\sqrt[4]{8}$

以上により、求める C_0 の座標は　$\therefore (2\sqrt[4]{2},\ 6\sqrt[4]{2}),\ (2\sqrt[4]{8},\ 6\sqrt[4]{8})$　……(答)

いずれの場合も、$n<0$ でも条件を満たす。





次に、点 $(100,50)$ は半直線 OB_0 上にある。

i)のとき　$n=-8m\ (m=1,2,3,\cdots)$ において

$A_{-8m}=(2\cdot 4^m,\ 4^m),\ B_{-8m}=(8\cdot 4^m,\ 4\cdot 4^m)=(2\cdot 4^{m+1},\ 4^{m+1})$ より　$A_{-16}=(32,16),\ B_{-16}=(128,64)$

点 $(100,50)$ は K_{-16} の辺 $A_{-16}B_{-16}$ 上にある。$A_{-16}B_{-16}$ は K_{-17} の辺 $D_{-17}C_{-17}$ に一致するから　$\therefore n=-17,-16$

ii)のとき　$n=8m\ (m=1,2,3,\cdots)$ において

同様に $A_{8m}=(2\cdot 4^m,\ 4^m),\ B_{8m}=(2\cdot 4^{m+1},\ 4^{m+1})$ より　$A_{16}=(32,16),\ B_{16}=(128,64)$

点 $(100,50)$ は K_{16} の辺 $A_{16}B_{16}$ 上にある。$A_{16}B_{16}$ は K_{15} の辺 $D_{15}C_{15}$ に一致するから　$\therefore n=15,16$

以上により　$C_0(2\sqrt[4]{2},\ 6\sqrt[4]{2})$ のとき　$n=-17,-16$　……(答)
　　　　　　$C_0(2\sqrt[4]{8},\ 6\sqrt[4]{8})$ のとき　$n=15,16$