1999年東大理$\boxed{2}$　※2015.3.23 修正しました。

(1)

$\alpha=(3+4i)\alpha+1$を解くと　$\alpha=-\dfrac{1}{2+4i}=-\dfrac{1-2i}{10}$　これより

$$z_{n+1}+\frac{1-2i}{10}=(3+4i)\left(z_n+\frac{1-2i}{10}\right)\quad \left|z_{n+1}+\frac{1-2i}{10}\right|=5\left|z_n+\frac{1-2i}{10}\right|$$

$$\therefore\left|z_n+\frac{1-2i}{10}\right|=5^{n-1}\left|1+\frac{1-2i}{10}\right|=\frac{|11-2i|}{10}\cdot5^{n-1}=\frac{5\sqrt{5}}{10}\cdot5^{n-1}=\frac{\sqrt{5}}{10}\cdot5^n$$

$\left|\dfrac{1-2i}{10}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ であるから、三角不等式により

$$|z_n|-\frac{\sqrt{5}}{10}<\frac{\sqrt{5}}{10}\cdot5^n<|z_n|+\frac{\sqrt{5}}{10}\qquad\therefore\frac{\sqrt{5}}{10}(5^n-1)<|z_n|<\frac{\sqrt{5}}{10}(5^n+1)$$

ここで、$n=1$のとき$|z_1|=1$であるから、$\dfrac{3}{4}<|z_1|<\dfrac{5}{4}$は成立。

$n\geqq2$のとき

$$\frac{5^n}{4}-\frac{\sqrt{5}}{10}(5^n+1)=\frac{5-2\sqrt{5}}{20}\cdot5^n-\frac{\sqrt{5}}{10}\geqq\frac{5-2\sqrt{5}}{20}\cdot5^2-\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{125-52\sqrt{5}}{20}=\frac{\sqrt{15625}-\sqrt{13520}}{20}>0$$

$$\frac{\sqrt{5}}{10}(5^n-1)-\frac{3\times5^{n-1}}{4}=\frac{2\sqrt{5}-3}{20}\cdot5^n-\frac{\sqrt{5}}{10}\geqq\frac{2\sqrt{5}-3}{20}\cdot5^2-\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{48\sqrt{5}-75}{20}>\frac{96-75}{20}>0$$

したがって、$n\geqq1$のとき$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$が示された。(証明終)

(2)

$n\geqq1$のとき、$\dfrac{5^{n-1}}{4}<\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$であるから、$\dfrac{5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$を満たす$|z_n|$は1個のみである。

これより、$\dfrac{5^0}{4}<|z_1|<\dfrac{5^1}{4},\ \dfrac{5^1}{4}<|z_2|<\dfrac{5^2}{4},\ \cdots,\ \dfrac{5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$であるから、$|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$を満たす$|z_n|$は$n$個。

したがって、$\dfrac{5^n}{4}\leqq r\leqq\dfrac{5^{n+1}}{4}$であるとき　$n\leqq f(r)\leqq n+1$ ——①

$$n\log5-2\log2\leqq\log r\leqq(n+1)\log5-2\log2\qquad\frac{1}{(n+1)\log5-2\log2}\leqq\frac{1}{\log r}\leqq\frac{1}{n\log5-2\log2}\quad ——②$$

①、②を辺々かけると

$$\frac{n}{(n+1)\log5-2\log2}\leqq\frac{f(r)}{\log r}\leqq\frac{n+1}{n\log5-2\log2}\qquad\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log5-\frac{2\log2}{n}}\leqq\frac{f(r)}{\log r}\leqq\frac{1+\frac{1}{n}}{\log5-\frac{2\log2}{n}}$$

$n\to+\infty$のとき$r\to+\infty$であるから、はさうみちの原理より　$\therefore\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}=\frac{1}{\log5}$　……(答)