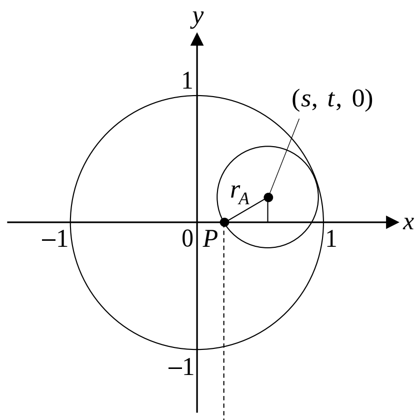
1999 年東大理 $\boxed{4}$

円板 A, B のいずれも、原点を中心とした半径 1 の円に内接しているときを考えればよい。

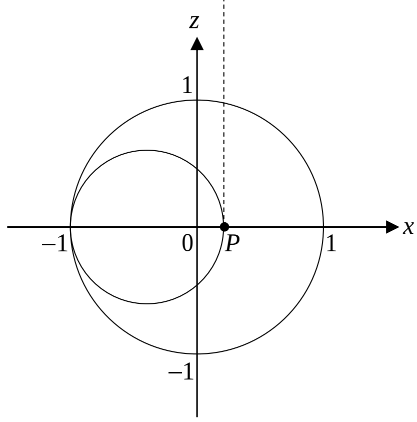


今、円板 A が右図のように xy 平面内の円 $x^2+y^2=1$ に内接しているとする。
円板 A の半径を r_A、中心の座標を $(s,\ t,\ 0)$ とする。

対称性から、$0<r_A \leqq \dfrac{1}{2}$、$s \geqq 0$、$0 \leqq t \leqq r_A$ で考える。

内接条件より　$s^2+t^2=(1-r_A)^2$　$s=\sqrt{(1-r_A)^2-t^2}$

P の x 座標は　$x_P=s-\sqrt{{r_A}^2-t^2}=\sqrt{(1-r_A)^2-t^2}-\sqrt{{r_A}^2-t^2}$



このとき、円板 B の直径として取り得る最大値は、$1+x_P$ である。

すなわち、円板 B の半径は $r_B=\dfrac{1+x_P}{2}$

r_A を固定して考えると、r_A+r_B が最大になるのは、x_P が最大のとき
である。

$$x_P=\frac{(1-r_A)^2-t^2-({r_A}^2-t^2)}{\sqrt{(1-r_A)^2-t^2}+\sqrt{{r_A}^2-t^2}}=\frac{1-2r_A}{\sqrt{(1-r_A)^2-t^2}+\sqrt{{r_A}^2-t^2}}$$

x_P が最大になるのは $t=r_A$ のときで、このとき

$$x_P=\frac{1-2r_A}{\sqrt{1-2r_A}}=\sqrt{1-2r_A}\qquad \therefore r_A+r_B=r_A+\frac{1+\sqrt{1-2r_A}}{2}$$

ここで、$x_P=\sqrt{1-2r_A}$ より、$0 \leqq x_P<1$ であるから、

$${x_P}^2=1-2r_A\qquad r_A=\frac{1-{x_P}^2}{2}\qquad \therefore r_A+r_B=\frac{1-{x_P}^2}{2}+\frac{1+x_P}{2}=-\frac{1}{2}{x_P}^2+\frac{1}{2}x_P+1=-\frac{1}{2}\left(x_P-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

したがって、r_A+r_B の最大値は $\dfrac{9}{8}$ ……(答)

なお、このとき、$x_P=\dfrac{1}{2}$ より、$r_A=\dfrac{3}{8}$, $r_B=\dfrac{3}{4}$ である。

円板 A の中心の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{8},\ 0\right)$ であり、円板 A は $P\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$ において x 軸と接している。