1999年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$0<n<m$ のとき

$${}_mC_n=\frac{m!}{(m-n)!n!}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{\{(m-1)-(n-1)\}!(n-1)!}=\frac{m}{n}\cdot{}_{m-1}C_{n-1}\qquad\therefore n\cdot{}_mC_n=m\cdot{}_{m-1}C_{n-1}$$

$m=2^k$ のとき、$n\cdot{}_mC_n$ は 2^k の倍数である。

ここで、$1\leqq n\leqq 2^k-1$ より、n に含まれる素因数2の個数は、$n=2^{k-1}$ のとき最大で、$k-1$ 個。

すなわち、${}_mC_n$ は少なくとも1個以上の素因数2を含む。

したがって、$m=2^k$ のとき、$0<n<m$ を満たすすべての整数について、${}_mC_n$ は偶数である。(証明終)

(2)

$0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数について ${}_mC_n$ が奇数であるとき、${}_{m+1}C_n={}_mC_{n-1}+{}_mC_n$ より

$0<n<m+1$ を満たすすべての整数について ${}_{m+1}C_n$ は偶数である。

逆に、$0<n<m+1$ を満たすすべての整数について ${}_{m+1}C_n$ が偶数であるとき、${}_{m+1}C_n={}_mC_{n-1}+{}_mC_n$ より

${}_mC_{n-1}$, ${}_mC_n$ は共に奇数であるか、共に偶数でなければならない。

${}_{m+1}C_1={}_mC_0+{}_mC_1=1+{}_mC_1$ より、${}_mC_1$ は奇数である。

${}_{m+1}C_2={}_mC_1+{}_mC_2$ より、${}_mC_1$ は奇数であるから、${}_mC_2$ は奇数である。

以下、${}_mC_3,\cdots,{}_mC_{m-1},{}_mC_m$ も奇数であることが順次わかる。

したがって、$0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数について ${}_mC_n$ は奇数である。

(1)より、$m=2^k$ のとき、$0<n<m$ を満たすすべての整数について、${}_mC_n$ は偶数であることがわかっている。

したがって、$m=2^k-1$ のとき、$0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数について ${}_mC_n$ は奇数である。

$m\neq 2^k-1$ のとき、${}_mC_n$ の中に必ず偶数が含まれることを示す。${}_{m+1}C_n={}_mC_{n-1}+{}_mC_n$ より

$m=2^k$ のとき　2^k-1 個の二項係数　${}_{2^k}C_1$, ${}_{2^k}C_2,\cdots,{}_{2^k}C_{2^k-1}$　は偶数である。

$m=2^k+1$ のとき　2^k-2 個の二項係数　${}_{2^k+1}C_2$, ${}_{2^k+1}C_3,\cdots,{}_{2^k+1}C_{2^k-1}$　は必ず偶数である。

⋮

$m=2^k+(2^k-3)=2^{k+1}-3$ のとき　$2^k-(2^k-2)=2$ 個の二項係数　${}_{2^{k+1}-3}C_{2^k-2}$, ${}_{2^{k+1}-3}C_{2^k-1}$　は必ず偶数である。

$m=2^k+(2^k-2)=2^{k+1}-2$ のとき　$2^k-(2^k-1)=1$ 個の二項係数　${}_{2^{k+1}-2}C_{2^k-1}$　は必ず偶数である。

$m=2^k+(2^k-1)=2^{k+1}-1$ のとき　2^{k+1} 個の二項係数　${}_{2^{k+1}-1}C_0$, ${}_{2^{k+1}-1}C_1,\cdots,{}_{2^{k+1}-1}C_{2^{k+1}-1}$　はすべて奇数である。

したがって、$2^k\leqq m<2^{k+1}-1$ のとき、${}_mC_n$ の中に必ず偶数が含まれることが示された。

求める m は　$\therefore m=2^k-1$ ……(答)