1999年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)

xy平面上の単位円$x^2+y^2=1$において、点(1, 0)から出発し、
原点中心に、円周に沿って角θだけ回転した点のx座標、y座標がそれぞれ$\cos\theta,\ \sin\theta$である。
$\theta \geqq 0$ならば反時計回り、$\theta \leqq 0$ならば時計回りになる。

(2)

一般角$\alpha,\ \beta$は、$\alpha = a+2m\pi,\ \beta = b+2n\pi$とおける。ただし、$m,\ n$は整数、$-\pi \leqq a \leqq \pi,\ -\pi \leqq b \leqq \pi$である。
このとき、(1)の定義により、$\sin\alpha = \sin a,\ \cos\alpha = \cos a$であり、$\sin\beta,\ \cos\beta$についても同様。
また、$\sin(\alpha+\beta) = \sin(a+b),\ \cos(\alpha+\beta) = \cos(a+b)$であるから、

$-\pi \leqq a \leqq \pi,\ -\pi \leqq b \leqq \pi$について $\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \end{cases}$ ——① を示せばよい。

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$の場合を考える。

$0 \leqq p \leqq \dfrac{\pi}{2}$とすると、$a$は$a = p,\ a = \dfrac{\pi}{2}+p$のいずれかの形で表される。

同様に、$0 \leqq q \leqq \dfrac{\pi}{2}$とすると、$b$は$b = q,\ b = \dfrac{\pi}{2}+q$のいずれかの形で表される。

(1)の定義により、$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$、$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta,\ \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$であるから

$a = p,\ b = q$のとき

$\sin(a+b) = \sin(p+q)$　　$\sin a\cos b + \cos a\sin b = \sin p\cos q + \cos p\sin q$

$\cos(a+b) = \cos(p+q)$　　$\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos p\cos q - \sin p\sin q$

$a = p,\ b = \dfrac{\pi}{2}+q$のとき

$\sin(a+b) = \cos(p+q)$　　$\sin a\cos b + \cos a\sin b = -\sin p\sin q + \cos p\cos q$

$\cos(a+b) = -\sin(p+q)$　　$\cos a\cos b - \sin a\sin b = -\cos p\sin q - \sin p\cos q$

$a = \dfrac{\pi}{2}+p,\ b = q$のとき

$\sin(a+b) = \cos(p+q)$　　$\sin a\cos b + \cos a\sin b = \cos p\cos q - \sin p\sin q$

$\cos(a+b) = -\sin(p+q)$　　$\cos a\cos b - \sin a\sin b = -\sin p\cos q - \cos p\sin q$

$a = \dfrac{\pi}{2}+p,\ b = \dfrac{\pi}{2}+q$のとき

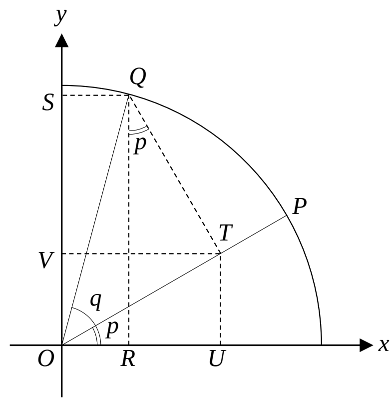
$\sin(a+b) = -\sin(p+q)$　　$\sin a\cos b + \cos a\sin b = -\cos p\sin q - \sin p\cos q$

$\cos(a+b) = -\cos(p+q)$　　$\cos a\cos b - \sin a\sin b = \sin p\sin q - \cos p\cos q$

したがって、①が成り立つには、いずれの場合も、

$0 \leqq p \leqq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq q \leqq \dfrac{\pi}{2}$について $\begin{cases} \sin(p+q) = \sin p\cos q + \cos p\sin q \\ \cos(p+q) = \cos p\cos q - \sin p\sin q \end{cases}$ が成り立てばよい。

$p+q \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき



Q から x 軸、 y 軸に下ろした垂線の足を $R,\ S$ とする。
さらに、 Q から OP に下ろした垂線の足を T とし、
T から x 軸、 y 軸に下ろした垂線の足を $U,\ V$ とすると、

$OT = \cos q,\ QT = \sin q$

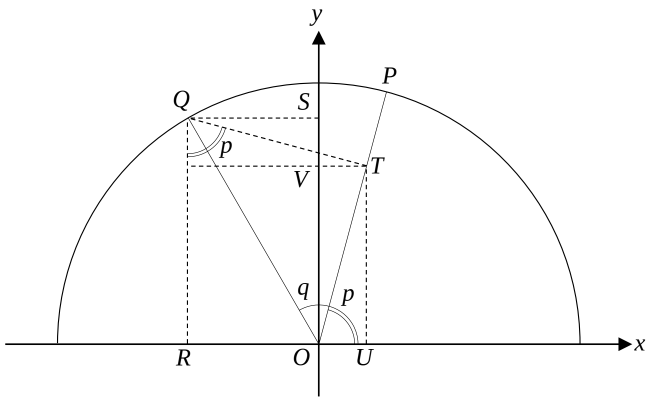
$OU = OT\cos p = \cos p\, coq,\ OV = OT\sin p = \sin p\cos q$

$RU = QT\sin p = \sin p\sin q,\ SV = QT\cos p = \cos p\sin q$

$\therefore OR = \cos(p+q) = OU - RU = \cos p\cos q - \sin p\sin q$

$\therefore OS = \sin(p+q) = OV + SV = \sin p\cos q + \cos p\sin q$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq p+q \leqq \pi$ のとき



同様に各点をおく。

$OT = \cos q,\ QT = \sin q$

$OU = OT\cos p = \cos p\, coq,\ OV = OT\sin p = \sin p\cos q$

$RU = QT\sin p = \sin p\sin q,\ SV = QT\cos p = \cos p\sin q$

$\therefore OR = -\cos(p+q) = RU - OU = \sin p\sin q - \cos p\cos q$

$\therefore OS = \sin(p+q) = OV + SV = \sin p\cos q + \cos p\sin q$

したがって、$0 \leqq p \leqq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq q \leqq \dfrac{\pi}{2}$ について $\begin{cases}\sin(p+q) = \sin p\cos q + \cos p\sin q \\ \cos(p+q) = \cos p\cos q - \sin p\sin q\end{cases}$ が成り立つから、
$0 \leqq a \leqq \pi,\ 0 \leqq b \leqq \pi$ について①が成り立つ。

次に、 $a \geqq b \geqq 0$ とすると、 $a-b \geqq 0$ であるから

$$\begin{cases}\sin a = \sin\{(a-b)+b\} = \sin(a-b)\cos b + \cos(a-b)\sin b \\ \cos a = \cos\{(a-b)+b\} = \cos(a-b)\cos b - \sin(a-b)\sin b\end{cases}$$

$\sin(a-b),\ \cos(a-b)$ について解くと

$$\begin{cases}\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b\end{cases}$$

(1) の定義により、$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$ であるから、これは①の b を $-b$ で置き換えたものに等しい。
したがって、 $a,\ b$ のうち一方が 0 以上、一方が 0 以下の場合も①は成立。

$a \leqq 0,\ b \leqq 0$ の場合も、 $\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$ および対称性から①は成立。

以上により、一般角 $\alpha,\ \beta$ について $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{cases}$ が示された。（証明終）