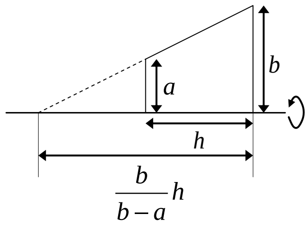
2000 年東大文 $\boxed{1}$

右図のような台形を回転させた回転体の体積を求める。

$a<b$ として、2 つの円錐の体積の差になるから、

$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi b^2\cdot\frac{b}{b-a}h-\frac{1}{3}\pi a^2\cdot\frac{a}{b-a}h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a}h=\frac{1}{3}\pi(b^2+ab+a^2)h$$

$a=0$ や $h=0$ や $a=b$ でも成立する。



これを利用すると

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\cdot 4x\left\{1+(1-x)+(1-x)^2\right\}+\frac{1}{3}\pi(1-x)\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot 4x(3-3x+x^2)+\frac{1}{3}\pi(1-x)\left(\frac{7}{4}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}x^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(12x-12x^2+4x^3+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{7}{4}+9x-\frac{21}{2}x^2+\frac{15}{4}x^3\right)=\frac{1}{12}\pi(15x^3-42x^2+36x+7)$$

$f(x)=15x^3-42x^2+36x+7$ とすると　$f'(x)=45x^2-84x+36=3(15x^2-28x+12)=3(5x-6)(3x-2)$

$f(x)$ の増減は右の通りで、$x=\dfrac{2}{3}$ において最大となる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		＋	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=15\cdot\frac{8}{27}-42\cdot\frac{4}{9}+36\cdot\frac{2}{3}+7=\frac{40}{9}-\frac{56}{3}+24+7=\frac{151}{9}$$

$V(x)$ の最大値は　$\dfrac{1}{12}\pi\cdot\dfrac{151}{9}=\dfrac{151}{108}\pi$　……(答)