2000年東大理後期 $\boxed{1}$

(1)

$P_1(0)=0$ であるから、$P_1(x)=a_1x$ とおく。

$P_1(x)-P_1(x-1)=a_1x-a_1(x-1)=a_1=1 \quad \therefore a_1=1 \quad \therefore P_1(x)=x$ ……(答)

$P_2(0)=0$ であるから、$P_2(x)=a_2x^2+a_1x$ とおく。

$P_2(x)-P_2(x-1)=a_2x^2+a_1x-a_2(x^2-2x+1)-a_1(x-1)=2a_2x+a_1-a_2=x$

$2a_1=1,\ a_1-a_2=0 \quad \therefore a_1=a_2=\dfrac{1}{2} \quad \therefore P_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$ ……(答)

(2)

(解答 1)

$P_k(0)=0$ であるから、$P_k(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x$ とおく。

$P_k(x)-P(x-1)=a_k\left\{x^k+(x-1)^k\right\}+a_{k-1}\left\{x^{k-1}-(x-1)^{k-1}\right\}+\cdots+a_1\left\{x-(x-1)\right\}=x^{k-1}$ ——①

$x^l-(x-1)^l={}_lC_{l-1}x^{l-1}-{}_lC_{l-2}x^{l-2}+\cdots-{}_lC_0(-1)^l$ は $l-1$ 次多項式である。①の両辺の係数を比較すると

$${}_kC_{k-1}a_k=1$$
$${}_{k-1}C_{k-2}\,a_{k-1}-{}_kC_{k-2}\,a_k=0$$
$${}_{k-2}C_{k-3}\,a_{k-2}-{}_{k-1}C_{k-3}\,a_{k-1}+{}_kC_{k-3}\,a_k=0$$
$$\vdots$$
$${}_1C_0\,a_1-{}_2C_0\,a_2+{}_3C_0\,a_3-\cdots-{}_kC_0(-1)^k\,a_k=0$$

最初の式より　$ka_k=1 \quad \therefore a_k=\dfrac{1}{k}(k\geqq 1)$　a_k がただ一つに決まる。以下、

$a_{k-1}=\dfrac{1}{k-1}{}_kC_{k-2}\,a_k$　a_k より a_{k-1} がただ一つに決まる。

$a_{k-2}=\dfrac{1}{k-2}({}_{k-1}C_{k-3}\,a_{k-1}-{}_kC_{k-3}\,a_k)$　$a_k,\ a_{k-1}$ より a_{k-2} がただ一つに決まる。

$\vdots$

$a_1=a_2-a_3+\cdots+(-1)^ka_k$　$a_k,\ a_{k-1},\ \cdots,\ a_2$ より a_1 がただ一つに決まる。

したがって、$a_{k-1},\ a_{k-2},\ \cdots,\ a_1$ が順次ただ一つに決まるから、題意は示された。(証明終)

(解答 2)

自然数 n に対して、$P_k(n)=1^{k-1}+2^{k-1}+\cdots+n^{k-1}$ となり、$P_k(n)$ はべき乗和である。

今、$k-1$ 乗和を表す n についての k 次多項式 $P_k(n)$ が、ただ一つ存在することを数学的帰納法で示す。

(1) より、$k=1,\ 2$ のとき成立。

$l\leqq k$ のとき、$l-1$ 乗和を表す n についての l 次多項式 $P_l(n)$ がただ一つ存在すると仮定する。

$$(i+1)^{k+1}-i^{k+1}={}_{k+1}C_k\, i^k+{}_{k+1}C_{k-1}\, i^{k-1}+\cdots+{}_{k+1}C_1\, i+{}_{k+1}C_0 \quad \text{——①}$$

$i=1$ から $i=n$ まで①の両辺の和をとると

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1}-1&={}_{k+1}C_k\sum_{i=1}^{n} i^k+{}_{k+1}C_{k-1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\cdots+{}_{k+1}C_1\sum_{i=1}^{n} i+{}_{k+1}C_0\sum_{i=1}^{n} 1\\ &={}_{k+1}C_k\, P_{k+1}(n)+{}_{k+1}C_{k-1}\, P_k(n)+\cdots+{}_{k+1}C_1\, P_2(n)+{}_{k+1}C_0\, P_1(n)\end{aligned}$$

$$\therefore P_{k+1}(n)=\frac{(n+1)^{k+1}-1-{}_{k+1}C_{k-1}\, P_k(n)-\cdots-{}_{k+1}C_1\, P_2(n)-{}_{k+1}C_0\, P_1(n)}{k+1}=\frac{(n+1)^{k+1}-1-\sum_{i=1}^{k}{}_{k+1}C_{i-1}\, P_i(n)}{k+1}$$

これより、 $P_{k+1}(n)$ は $k+1$ 次多項式である。
仮定により、 $P_1(n),\ P_2(n),\ \cdots,\ P_k(n)$ はすべてただ一つ存在するから、 $P_{k+1}(n)$ もただ一つ存在する。
ここで、(1) より、 $P_1(x),\ P_2(x)$ は一般の実数 x についてただ一つ存在する。
したがって、 $P_3(x)$ も一般の実数 x についてただ一つ存在することがわかる。
以下帰納的に、 $P_4(x),\ P_5(x),\ P_6(x),\ \cdots$ も一般の実数 x についてただ一つ存在することがわかる。
以上により題意は示された。(証明終)

(3)

条件より、$Q_k(x)=\dfrac{x(x-1)\cdots\{x-(k-1)\}}{k!}$ と書ける。

自然数 i について、$Q_k(i)=\begin{cases}0 & 1\leqq i\leqq k-1\\ {}_iC_k & k\leqq i\end{cases}$ となる。

今、 $P_k(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j Q_j(x)$ として、両辺に $x=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ を代入すると

$$\begin{aligned}&P_k(1)={}_1C_1\, c_1\\ &P_k(2)={}_2C_1\, c_1+{}_2C_2\, c_2\\ &P_k(3)={}_3C_1\, c_1+{}_3C_2\, c_2+{}_3C_3\, c_3\\ &\vdots\\ &P_k(k)={}_kC_1\, c_1+{}_kC_2\, c_2+{}_kC_3\, c_3+\cdots+{}_kC_k\, c_k\end{aligned}$$

$P_k(1)=1$ であるから、最初の式より　$\therefore c_1=1$　整数 c_1 がただ一つに決まる。
以下、 $P_k(2),\ P_k(3),\ \cdots,\ P_k(k)$ はべき乗和であるから整数であり、二項係数はすべて整数であるから、

$c_2=P_k(2)-2c_1$　 c_1 より整数 c_2 がただ一つに決まる。
$c_3=P_k(3)-3c_1-3c_2$　 $c_1,\ c_2$ より整数 c_3 がただ一つに決まる。
$\vdots$
$c_k=P_k(k)-{}_kC_1\, c_1-{}_kC_2\, c_2-\cdots-{}_kC_{k-1}c_{k-1}$　 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{k-1}$ より整数 c_k がただ一つに決まる。

したがって、整数 $c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_k$ が順次ただ一つに決まるから、題意は示された。(証明終)

(注)

(2) は具体的な式の算出までは要求していないが、係数の一部を求めると

$$(k-1)a_{k-1}-\frac{k(k-1)}{2}a_k=0 \quad \therefore a_{k-1}=\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\,(k\geqq 2)$$

$$(k-2)a_{k-2}-\frac{(k-1)(k-2)}{2}a_{k-1}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}a_k=0 \quad \therefore a_{k-2}=\frac{k-1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{k(k-1)}{6}\cdot\frac{1}{k}=\frac{k-1}{12}\,(k\geqq 3)$$

$$(k-3)a_{k-3}-\frac{(k-2)(k-3)}{2}a_{k-2}+\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}a_{k-1}-\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}a_k=0$$

$$\therefore a_{k-3}=\frac{k-2}{2}\cdot\frac{k-1}{12}-\frac{(k-1)(k-2)}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{24}\cdot\frac{1}{k}=0\,(k\geqq 4)$$

一般式はベルヌーイ数 B_n を用いて以下のように表せる。 $a_{k-n}=(-1)^n\frac{{}_kC_n}{k}B_n\,(0\leqq n\leqq k-1)$

B_n は以下の漸化式で定義される。 $B_0=1,\ B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n+1}C_i\,B_i$

B_n を具体的に求めると以下の通りで、n が 1 以外の奇数であるとき、$B_n=0$ となる。

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{12}=-\frac{691}{2730},\ B_{14}=\frac{7}{6},\ \cdots$$

(2) の (解答 2) は、べき乗和の公式の一般的な求め方である。