2000 年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

5 人中 3 人がコインを 1 枚置き、2 人がコインを 2 枚置くから

$$\therefore Q={}_5C_3p^3(1-p)^2=10p^3(1-p)^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$Q(p)=10p^3(1-p)^2$ とおくと

$$Q'(p)=30p^2(1-p)^2-20p^3(1-p)=10p^2(1-p)\{3(1-p)-2p\}=10p^2(1-p)(3-5p)$$

p	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	1
$Q'(p)$		$+$	0	$-$	
$Q(p)$		↗		↘	

Q は $p=\dfrac{3}{5}$ で最大。……(答)

このとき $Q=10\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{2^3\cdot 3^3}{5^5}=\dfrac{216}{625}$ ……(答)

(2)

i)背番号 4 の人まで置いたとき、テーブル上にコインが 5 枚あり、背番号 5 の人がコインを 2 枚置く。

ii)背番号 4 の人まで置いたとき、テーブル上にコインが 6 枚ある。

のいずれかである。

i)の場合、まず 4 人中 3 人がコインを 1 枚置き、1 人がコインを 2 枚置く。

ii)の場合、まず 4 人中 2 人がコインを 1 枚置き、2 人がコインを 2 枚置く。背番号 5 の人は、コインを何枚置くかに関わらず、必ず 7 枚目のコインを置く。

$$\therefore R=(1-p)\cdot{}_4C_1p^3(1-p)+{}_4C_2p^2(1-p)^2=4p^3(1-p)^2+6p^2(1-p)^2=2p^2(2p+3)(1-p)^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$R(p)=2p^2(2p+3)(1-p)^2$ とおくと

$$\begin{aligned}R'(p)&=4p(2p+3)(1-p)^2+4p^2(1-p)^2-4p^2(2p+3)(1-p)\\&=4p(1-p)\{(2p+3)(1-p)+p(1-p)-p(2p+3)\}\\&=4p(1-p)(-2p^2-p+3+p-p^2-2p^2-3p)=-4p(1-p)(5p^2+3p-3)\\&=-20p(1-p)\left(p-\frac{-3+\sqrt{69}}{10}\right)\left(p-\frac{-3-\sqrt{69}}{10}\right)\end{aligned}$$

$8<\sqrt{69}<9$ より $\quad \dfrac{-3+8}{10}<\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}<\dfrac{-3+9}{10} \quad \therefore \dfrac{1}{2}<\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}<\dfrac{3}{5}$

p	0	$\cdots$	$\frac{-3+\sqrt{69}}{10}$	$\cdots$	1
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$		↗		↘	

R は $p=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}$ で最大。……(答)

(3)

二巡目を終えたとき、各人がテーブル上に置くコインの枚数は、2 枚か 3 枚である。

二巡目を終えたとき、各人がテーブル上に 2 枚を置く確率は　p^2

二巡目を終えたとき、各人がテーブル上に 3 枚を置く確率は、一巡目にコインを 2 枚置くと、二順目に残り 1 枚を必ず置くことに注意して　$p(1-p)+1-p=1-p^2$

二巡目を終えてテーブル上にあるコインの枚数は、10 枚以上 15 枚以下。$s=p^2$ とおくと、求める期待値は

$$E=10\cdot{}_5C_0s^5+11\cdot{}_5C_1s^4(1-s)+12\cdot{}_5C_2s^3(1-s)^2+13\cdot{}_5C_3s^2(1-s)^3+14\cdot{}_5C_4s(1-s)^4+15\cdot{}_5C_5(1-s)^5$$

二項定理により

$$\begin{aligned}
E&=10\cdot\left\{{}_5C_0s^5+{}_5C_1s^4(1-s)+{}_5C_2s^3(1-s)^2+{}_5C_3s^2(1-s)^3+{}_5C_4s(1-s)^4+{}_5C_5(1-s)^5\right\}\\
&\quad+{}_5C_1s^4(1-s)+2\cdot{}_5C_2s^3(1-s)^2+3\cdot{}_5C_3s^2(1-s)^3+4\cdot{}_5C_4s(1-s)^4+5\cdot{}_5C_5(1-s)^5\\
&=10\{s+(1-s)\}^5+(1-s)\left\{{}_5C_1s^4+2\cdot{}_5C_2s^3(1-s)+3\cdot{}_5C_3s^2(1-s)^2+4\cdot{}_5C_4s(1-s)^3+5\cdot{}_5C_5(1-s)^4\right\}\\
&=10+(1-s)\left\{5s^4+20s^3(1-s)+30s^2(1-s)^2+20s(1-s)^3+5(1-s)^4\right\}\\
&=10+5(1-s)\left\{s^4+4s^3(1-s)+6s^2(1-s)^2+4s(1-s)^3+(1-s)^4\right\}\\
&=10+5(1-s)\left\{{}_4C_0s^4+{}_4C_1s^3(1-s)+{}_4C_2s^2(1-s)^2+{}_4C_3s(1-s)^3+{}_4C_4(1-s)^4\right\}\\
&=10+5(1-s)\{s+(1-s)\}^4=15-5s
\end{aligned}$$

したがって　$\therefore E=15-5p^2$　……(答)

(注)

$k\cdot{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(k-1)\}!(k-1)!}=n\cdot{}_{n-1}C_{k-1}$ より

一般に、

$$\begin{aligned}
&{}_nC_1a^{n-1}+2\cdot{}_nC_2a^{n-2}b+\cdots+k\cdot{}_nC_ka^{n-k}b^{k-1}+\cdots+(n-1)\cdot{}_nC_{n-1}ab^{n-2}+n\cdot{}_nC_nb^{n-1}\\
&\quad=n({}_{n-1}C_0a^{n-1}+{}_{n-1}C_1a^{n-2}b+\cdots+{}_{n-1}C_{k-1}a^{n-k}b^{k-1}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}ab^{n-2}+{}_{n-1}C_{n-1}b^{n-1})\\
&\quad=n(a+b)^{n-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ。