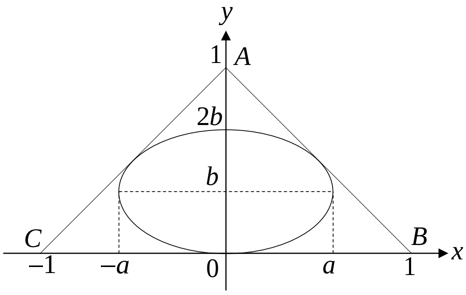
2000年東大理 $\boxed{1}$

座標平面において、$A(0,1), B(1,0), C(-1,0)$ とする。

x 軸に接する楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-b)^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ を考える。



これが直線 $y=1-x$ に接するとき、$b^2x^2+a^2(y-b)^2=a^2b^2$ に代入して

$$b^2(1-y)^2+a^2(y-b)^2=b^2(y^2-2y+1)+a^2(y^2-2by+b^2)=a^2b^2$$

$$(a^2+b^2)y^2-2b(a^2+b)y+b^2=0$$

y に関する二次方程式 $(a^2+b^2)y^2-2b(a^2+b)y+b^2=0$ が重解を持つから

$$D/4=b^2(a^2+b)^2-b^2(a^2+b^2)=b^2\left\{(a^4+2a^2b+b^2)-(a^2+b^2)\right\}$$

$$=b^2(a^4+2a^2b-a^2)=a^2b^2(a^2+2b-1)=0$$

$$a^2+2b-1=0 \quad \therefore b=\frac{1}{2}(1-a^2) \text{ ——①}$$

このとき、対称性から、$y=1+x$ にも接する。

楕円の面積は πab で与えられる。①より $ab=\dfrac{1}{2}a(1-a^2)$ であるから、

$0<a<1$ において $S(a)=\dfrac{\pi}{2}a(1-a^2)$ の増減を調べる。　$S'(a)=\dfrac{\pi}{2}(1-3a^2)=-\dfrac{3}{2}\pi\left(a+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

増減は右の通りで、$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗		↘	

最大値は　$\therefore \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$　……(答)

(注)

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の面積は、以下のように求められる。

$y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ より　$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$　対称性より　$S=\dfrac{4b}{a}\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は半径 a の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ であるから　$\therefore S=\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{\pi a^2}{4}=\pi ab$