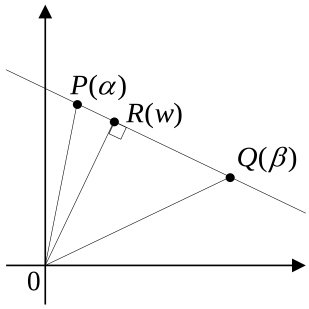
2000年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{4}$共通

原点を$O(0)$と表す。

三角形$O(0)P(\alpha)R(w)$、三角形$O(0)Q(\beta)R(w)$は直角三角形であるから



$$\begin{cases} |w|^2+|w-\alpha|^2=|\alpha|^2 & \text{——①} \\ |w|^2+|w-\beta|^2=|\beta|^2 & \text{——②} \end{cases}$$

$\alpha\neq 0$であるから、①に$w=\alpha\beta$を代入すると

$$|\alpha|^2|\beta|^2+|\alpha|^2|\beta-1|^2=|\alpha|^2 \quad \therefore |\beta|^2+|\beta-1|^2=1$$

$$|\beta|^2+|\beta-1|^2=\beta\overline{\beta}+(\beta-1)\overline{(\beta-1)}=\beta\overline{\beta}+(\beta-1)(\overline{\beta}-1)=2\beta\overline{\beta}-\beta-\overline{\beta}+1=1 \quad \therefore 2\beta\overline{\beta}-\beta-\overline{\beta}=0$$

$$2\beta\overline{\beta}-\beta-\overline{\beta}=0 \Leftrightarrow \left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{\beta}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\beta-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\beta-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4} \quad \therefore \left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

同様に、$\beta\neq 0$であるから、②に$w=\alpha\beta$を代入すると、$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$を得る。

以上により必要性が示された。

逆に、$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\ \left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$であるとき

$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\ \left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}=0,\ 2\beta\overline{\beta}-\beta-\overline{\beta}=0 \Leftrightarrow \overline{\alpha}=\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \overline{\beta}=\frac{\beta}{2\beta-1}$$

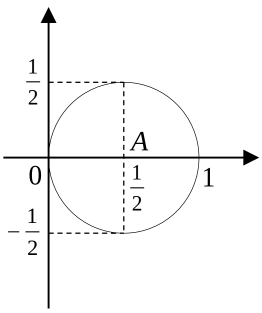
①より

$$|w|^2+|w-\alpha|^2=w\overline{w}+(w-\alpha)(\overline{w}-\overline{\alpha})=2w\overline{w}-\overline{\alpha}w-\alpha\overline{w}+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha} \quad \therefore \overline{\alpha}w=(2w-\alpha)\overline{w} \quad \text{——③}$$

同様に、②より　$\therefore \overline{\beta}w=(2w-\beta)\overline{w}$ ——④

③、④より$\overline{w}$を消去すると　$\left\{\overline{\alpha}(2w-\beta)-\overline{\beta}(2w-\alpha)\right\}w=0$

$\alpha\neq 0$かつ$\beta\neq 0$のとき、lが原点を通ることはないので、$w\neq 0$である。



$$\overline{\alpha}(2w-\beta)-\overline{\beta}(2w-\alpha)=2(\overline{\alpha}-\overline{\beta})w-\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=0 \quad \therefore w=\frac{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}{2(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}$$

$\overline{\alpha}=\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \overline{\beta}=\frac{\beta}{2\beta-1}$を代入すると

$$w=\frac{\frac{\alpha\beta}{2\alpha-1}-\frac{\alpha\beta}{2\beta-1}}{2\left(\frac{\alpha}{2\alpha-1}-\frac{\beta}{2\beta-1}\right)}=\alpha\beta\cdot\frac{(2\beta-1)-(2\alpha-1)}{2\left\{\alpha(2\beta-1)-\beta(2\alpha-1)\right\}}=\alpha\beta\cdot\frac{2(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)}=\alpha\beta$$

したがって、$w=\alpha\beta$を得たので、十分性も示された。(証明終)