2000年東大理 $\boxed{3}$

(1)

$f_n(kh)=\dfrac{1}{p_k}$，$f_n((k+1)h)=\dfrac{1}{p_{k+1}}$ であるから、与式に代入して

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p_{k+1}}-\frac{1}{p_k}\right)=\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\frac{1}{p_{k+1}} \qquad p_k-p_{k+1}=h(p_k-1) \qquad p_{k+1}=(1-h)p_k+h \qquad p_{k+1}-1=(1-h)(p_k-1)$$

$p_0=\dfrac{1}{f_n(0)}=\dfrac{1}{c}$ より　$p_k-1=(1-h)^k\left(\dfrac{1}{c}-1\right)$　$\therefore p_k=1+\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^k$ ……(答)

(2)

$f_n(kh)=\dfrac{1}{p_k}$ より、$k=n$ とすると、$nh=a$ であるから　$f_n(a)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n}$

ここで

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-a}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{a}{n-a}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{a}{n-a}\right)^{n-a}\left(1+\dfrac{a}{n-a}\right)^a}=\frac{1}{\left\{\left(1+\dfrac{a}{n-a}\right)^{\frac{n-a}{a}}\left(1+\dfrac{a}{n-a}\right)\right\}^a}$$

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{a}{n-a}\to 0$ より、$\left(1+\dfrac{a}{n-a}\right)^{\frac{n-a}{a}}\to e$　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e^a}$　$\therefore g(a)=\dfrac{e^a}{e^a+\dfrac{1}{c}-1}$ ……(答)

(3)

$c=2$ のとき　$g(x)=\dfrac{e^x}{e^x-\dfrac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2e^x-1}$　$g'(x)=-\dfrac{2e^x}{(2e^x-1)^2}<0$　であるから単調減少。

$$g''(x)=-2\frac{e^x(2e^x-1)^2-e^x\cdot 2(2e^x-1)\cdot 2e^x}{(2e^x-1)^4}=-2\frac{e^x(2e^x-1)-4e^{2x}}{(2e^x-1)^3}=\frac{2e^x(2e^x+1)}{(2e^x-1)^3}>0$$　より、下に凸。

$c=1$ のとき　$g(x)=\dfrac{e^x}{e^x}=1$ で一定。

$c=\dfrac{1}{4}$ のとき　$g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}=1-\dfrac{3}{e^x+3}$　$g'(x)=\dfrac{3e^x}{(e^x+3)^2}>0$　であるから単調増加。

$$g''(x)=3\frac{e^x(e^x+3)^2-e^x\cdot 2(e^x+3)\cdot e^x}{(e^x+3)^4}=3\frac{e^x(e^x+3)-2e^{2x}}{(2e^x-1)^3}=\frac{3e^x(3-e^x)}{(2e^x-1)^3}$$

したがって、$x=\log 3$ において、変曲点を持つ。

$0<x<\log 3$ のとき $g''(x)>0$ で、下に凸。

$\log 3<x$ のとき $g''(x)<0$ で、上に凸。

いずれの場合も $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$ で、グラフは右図の通り。