2000年東大理$\boxed{4}$

点Pと線分QRがぶつかるとき、Pのy座標は$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq 1$であり、点$P$と線分$QR$の$x$座標が一致する。

すなわち、$\frac{\pi}{3}+2n\pi \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi+2n\pi\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$かつ$\cos t = 1 - vt$となる時刻$t$が存在する。

$v=\frac{1-\cos t}{t}$として、$f(t)=\frac{1-\cos t}{t}$の$\frac{\pi}{3}+2n\pi \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi+2n\pi$における増減を考える。

$f'(t)=\frac{t\sin t+\cos t-1}{t^2}$　さらに$g(t)=t\sin t+\cos t-1$とすると　$g'(t)=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$

$g(t)$は$t=\frac{\pi}{2}+2n\pi$において極大となる。

$$g\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \geqq \frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}>0 \qquad g\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)=\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} \geqq \frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{2}>0$$

したがって、$\frac{\pi}{3}+2n\pi \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi+2n\pi$において、$g(t)>0$、$f'(t)>0$であるから、$f(t)$は単調増加。

(1)

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\div\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2\pi},\ f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}\div\frac{2}{3}\pi=\frac{9}{4\pi}$$

したがって、$0 \leqq t \leqq 2\pi$において点Pと線分QRがぶつからない条件は　$\therefore 0<v<\frac{3}{2\pi},\ \frac{9}{4\pi}<v$　……(答)

(2)

$$f\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=\frac{1}{2}\div\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=\frac{3}{2(6n+1)\pi},\ f\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)=\frac{3}{2}\div\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)=\frac{9}{4(3n+1)\pi}$$

$\frac{3}{2(6n+1)\pi} \leqq v \leqq \frac{9}{4(3n+1)\pi}$のとき、$\frac{\pi}{3}+2n\pi \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi+2n\pi$において、点$P$と線分$QR$は1回ぶつかる。

今、領域$D_n=\left\{v \,\middle|\, \alpha_n \leqq v \leqq \beta_n,\ \alpha_n=\frac{3}{2(6n+1)\pi},\ \beta_n\ \frac{9}{4(3n+1)\pi}\right\}(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$を定義する。

$$\beta_{n+1}-\alpha_n=\frac{9}{4(3n+4)\pi}-\frac{3}{2(6n+1)\pi}=\frac{3(12n-7)}{4\pi(3n+4)(6n+1)}$$

これより、$\beta_1<\alpha_0$であるから、D_0は他の領域と共通範囲を持たない。

$n \geqq 1$のとき、$\beta_{n+1}>\alpha_n$であるから、D_nとD_{n+1}は共通範囲$\alpha_n \leqq v \leqq \beta_{n+1}$を持つ。

$$\beta_{n+2}-\alpha_n=\frac{9}{4(3n+7)\pi}-\frac{3}{2(6n+1)\pi}=\frac{3(12n-11)}{4\pi(3n+7)(6n+1)}$$

これより、$n \geqq 1$のとき、$\beta_{n+2}>\alpha_n$である。

$n \geqq 2$のとき、D_nはD_{n-1}と共通範囲$\alpha_{n-1} \leqq v \leqq \beta_n$を持ち、$D_{n+1}$と共通範囲$\alpha_n \leqq v \leqq \beta_{n+1}$を持つ。

$\beta_{n+1}>\alpha_{n-1}$であるから、$n \geqq 2$のとき、D_nは必ず他の領域との共通範囲を持つ。

vがただ一つの領域に属することが条件であるから、そのようなvが属するのは、$D_0,\ D_1$に限られる。

求める範囲は　$\beta_2<v \leqq \beta_1,\ \alpha_0 \leqq v \leqq \beta_0$　$\therefore \frac{9}{28\pi}<v \leqq \frac{9}{16\pi},\ \frac{3}{2\pi} \leqq v \leqq \frac{9}{4\pi}$　……(答)