

2000年東大理 5

(1)

0と9、1と8、2と7、3と6、4と5のうちいずれか片方のみを使って4桁の整数を作ること考える。
1000の位の数字は0を除く9通り。100の位の数字は、1000の位の数字と足して9になる数字を除く8通り。
以下、桁が1つ下がる毎に使える数字は2つずつ減り、10の位の数字は6通り、1の位の数字は4通り。
4桁のSの要素は $9 \times 8 \times 6 \times 4 = 1728$ 個 ……(答)

(2)

1桁のSの要素は9個。

(1)と同様の議論より、2桁のSの要素は $9 \times 8 = 72$ 個、3桁のSの要素は $9 \times 8 \times 6 = 432$ 個。

3桁以下のSの要素は、 $9 + 72 + 432 = 513$ 個。

$2000 - 513 = 1487$ で、求める要素は4桁のSの要素の中で小さい方から1487番目。

4桁のSの要素のうち、1000の位が1、2、3、4、5、6、7、8、9であるものがそれぞれ $8 \times 6 \times 4 = 192$ 個ある。

1000の位が1~7であるものが $192 \times 7 = 1344$ 個。1000の位が1~8であるものが $192 \times 8 = 1536$ 個。

したがって、4桁のSの要素の中で小さい方から1487番目の要素の1000の位の数字は8。 $1487 - 1344 = 143$ で、
求める要素は1000の位が8である4桁のSの要素の中で小さい方から143番目。

求める要素のうち、100の位が0、2、3、4、5、6、7、9であるものがそれぞれ $6 \times 4 = 24$ 個ある。

100の位が0、2、3、4、5であるものが $24 \times 5 = 120$ 個。

100の位が0、2、3、4、5、6であるものが $24 \times 6 = 144$ 個。

したがって、求める要素は、1000の位が8、100の位が6である4桁のSの要素の中で大きい方から2番目。

10の位と1の位に使える残りの数字は0、2、4、5、7、9であり、これらを使って作れる2番目に大きい2桁の数は95。

以上により、求める要素は8695 ……(答)