2000 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a&ab\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&c+a&ab\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y&yz\\0&1&z+x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

成分を比較すると　$y=c+a$ ——① 　$yz=ab$ ——② 　$z+x=b$ ——③

①、②より　$z=\dfrac{ab}{y}=\dfrac{ab}{a+c}$ 　③より　$x=b-\dfrac{ab}{a+c}=\dfrac{bc}{a+c}$

したがって　$\therefore x=\dfrac{bc}{a+c},\ y=a+c,\ z=\dfrac{ab}{a+c}$ ……(答)

(2)

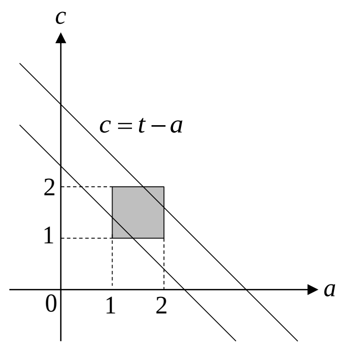
$y=t$ とすると、$a+c=t$ であり、$1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq c\leqq 2$ より

$2\leqq t\leqq 3$ のとき　$1\leqq c\leqq t-1$

$3\leqq t\leqq 4$ のとき　$t-2\leqq c\leqq 2$

$x=\dfrac{bc}{a+c},\ z=\dfrac{ab}{a+c}$ より　$z=\dfrac{a}{c}x=\dfrac{t-c}{c}x=\left(\dfrac{t}{c}-1\right)x$ ——①

$x+z=b,\ 1\leqq b\leqq 2$ より　$1\leqq x+z\leqq 2$ ——②

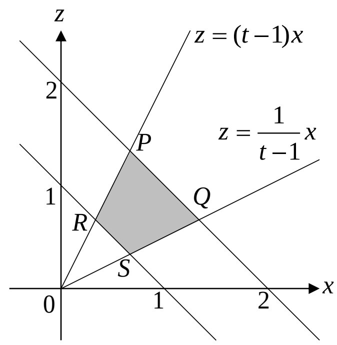


$2<t\leqq 3$ のとき

$1\leqq c\leqq t-1$ より　$\dfrac{1}{t-1}\leqq\dfrac{1}{c}\leqq 1$ 　$\dfrac{t}{t-1}\leqq\dfrac{t}{c}\leqq t$ 　$\dfrac{1}{t-1}\leqq\dfrac{t}{c}-1\leqq t-1$

①より　$\therefore \dfrac{1}{t-1}x\leqq z\leqq(t-1)x$ 　②と合わせ、$y=t$ による切り口は

右図の通り。図の $P,\ Q$ の x 座標を求める。



P の x 座標は　$2-x=(t-1)x$ 　$2=tx$ 　$\therefore x=\dfrac{2}{t}$

Q の x 座標は　$2-x=\dfrac{1}{t-1}x$ 　$2=\dfrac{t}{t-1}x$ 　$\therefore x=2\left(1-\dfrac{1}{t}\right)$

PQ の長さは　$\sqrt{2}\times\left\{2\left(1-\dfrac{1}{t}\right)-\dfrac{2}{t}\right\}=2\sqrt{2}\left(1-\dfrac{2}{t}\right)$ 　相似性より、RS の長さは　$\sqrt{2}\left(1-\dfrac{2}{t}\right)$

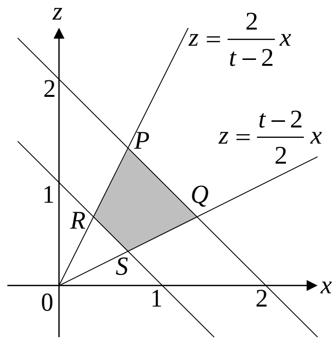
直線 $z=2-x$ と $z=1-x$ の距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、台形 $PQSR$ の面積は

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left\{\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{t}\right)+2\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{t}\right)\right\}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{2}{t}\right) \text{ ——③}$$

$t=2$ のとき、$a=c=1$ であり、①は $z=x$ となり、切り口の面積は 0。したがって、③は $t=2$ でも成立。

$3 \leqq t < 4$ のとき

$t-2 \leqq c \leqq 2$ より　$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{t-2}$　$\dfrac{t}{2} \leqq \dfrac{t}{c} \leqq \dfrac{t}{t-2}$　$\dfrac{t-2}{2} \leqq \dfrac{t}{c}-1 \leqq \dfrac{2}{t-2}$



①より　$\therefore \dfrac{t-2}{2}x \leqq z \leqq \dfrac{2}{t-2}x$　②と合わせ、$y=t$ による切り口は

右図の通り。図の P, Q の x 座標を求める。

P の x 座標は　$2-x=\dfrac{2}{t-2}x$　$2=\dfrac{t}{t-2}x$　$\therefore x=2\left(1-\dfrac{2}{t}\right)$

Q の x 座標は　$2-x=\dfrac{t-2}{2}x$　$2=\dfrac{t}{2}x$　$\therefore x=\dfrac{4}{t}$

PQ の長さは　$\sqrt{2}\times\left\{\dfrac{4}{t}-2\left(1-\dfrac{2}{t}\right)\right\}=2\sqrt{2}\left(\dfrac{4}{t}-1\right)$　相似性より、RS の長さは　$\sqrt{2}\left(\dfrac{4}{t}-1\right)$

直線 $z=2-x$ と $z=1-x$ の距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、台形 $PQSR$ の面積は

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left\{\sqrt{2}\left(\frac{4}{t}-1\right)+2\sqrt{2}\left(\frac{4}{t}-1\right)\right\}=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{t}-1\right) \text{ ——④}$$

$t=4$ のとき、$a=c=2$ であり、①は $z=x$ となり、切り口の面積は 0 。したがって、④は $t=4$ でも成立。

以上③、④により、求める面積は　$2 \leqq t \leqq 3$ のとき $\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{2}{t}\right)$、$3 \leqq t \leqq 4$ のとき $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{4}{t}-1\right)$ ……(答)

(3)

$$\frac{3}{2}\int_2^3\left(1-\frac{2}{t}\right)dt+\frac{3}{2}\int_3^4\left(\frac{4}{t}-1\right)dt=\frac{3}{2}\left[t-2\log t\right]_2^3+\frac{3}{2}\left[4\log t-t\right]_3^4$$

$$=\frac{3}{2}(3-2\log 3-2+2\log 2+8\log 2-4-4\log 3+3)$$

$$=\frac{3}{2}(10\log 2-6\log 3)=15\log 2-9\log 3 \text{ ……(答)}$$