2001 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

条件より、a と b の差の絶対値は 0 か 1 であり、a と b の関係は $a=b,\ a=b+1,\ b=a+1$ のいずれかである。

n 回の試行後 $a=b$ であるとき、$n+1$ 回目の試行で必ず $a\neq b$ となる。$n+1$ 回の試行後 $a=b$ となるには、

　ｉ）n 回の試行後 $b=a+1$ であり、$n+1$ 回目の試行で表が出る

ｉｉ）n 回の試行後 $a=b+1$ であり、$n+1$ 回目の試行で裏が出る

のいずれかであるから　$\therefore X_{n+1}=2^n-X_n$　……(答)

(2)

(1) で求めた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2}\qquad \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right)\qquad \frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}=\left(\frac{X_1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

最初、$A,\ B$ はともに原点にあり、$X_1=0$ であるから

$$\frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\qquad \therefore X_n=\frac{2^n}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$$　……(答)

※理系 $\boxed{6}$ の (2) までと共通。