

2001 年東大文 [4]

xy 平面上の点 $(0, 0)$ から出発し、碁石を無作為に取り出して左から並べながら、以下の操作を行う。
 点の座標が (x_k, y_k) であるとき、白石が出たら $(x_k + 1, y_k - 1)$ へ、黒石が出たら $(x_k + 1, y_k + 1)$ へ移動する。
 このようにして $x_{361} = 361$ まで折れ線を引いていく。途中どのように辿っても、 $y_{361} = 1$ である。

i) 最初に黒石を取り出したとき

左端が黒石になる。その黒石を含めすべての碁石を除けば、題意を満たす。

ii) 最初に白石を取り出したとき

点は $(1, -1)$ へ移動し、 $y_1 = -1$ である。

$y_{361} = 1$ となるためには、折れ線は少なくとも 1 回、負側から正側へ x 軸と交差しなければならない。

m 回目の操作で黒石を取り出し、 $y_m = 0$ となったとき、その時点で並んでいる m 個の碁石は、白石と黒石が同数である。さらに $m+1$ 回目の操作で黒石を取り出し、 $y_{m+1} = 1$ となったとき、 $m+1$ 個目以降の碁石をすべて除けば、残りは白石と黒石が同数となる。このような自然数 m ($2 \leq m \leq 360$) が必ず存在する。

以上により、題意は示された。(証明終)

