2001年東大理後期 $\boxed{1}$

$k \geqq 2$ において、 $f(k)=\dfrac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ とすると

$$f(k)=\left(\sqrt{k^2-1}\right)' \qquad f'(k)=\frac{\sqrt{k^2-1}-k\cdot\dfrac{k}{\sqrt{k^2-1}}}{k^2-1}=\frac{(k^2-1)-k^2}{(k^2-1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{(k^2-1)^{\frac{3}{2}}}<0$$

$f(k)$ は単調減少であるから

$$f(k+1)<\int_k^{k+1} f(x)dx<f(k) \quad \therefore f(k+1)<\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}<f(k)$$

$n \geqq 4$ のとき

$$\sum_{k=3}^{n-1} f(k+1)<\sum_{k=3}^{n-1}\left\{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}\right\}<\sum_{k=3}^{n-1} f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k)-f(2)-f(3)<\sqrt{n^2-1}-2\sqrt{2}<\sum_{k=2}^{n} f(k)-f(2)-f(n)$$

$$\sqrt{n^2-1}-2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}<\sum_{k=2}^{n} f(k)<\sqrt{n^2-1}-2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore n-\sqrt{n^2-1}+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}<n-\sum_{k=2}^{n} f(k)<n-\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=1$$

であるから

$$\therefore \frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}<\lim_{n\to\infty}\left\{n-\sum_{k=2}^{n} f(k)\right\}<2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-1$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{12}>\frac{15\times1.414-8\times1.733}{12}=\frac{7.346}{12}=0.612\cdots$$

$$2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-1=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}-1<\frac{6\times1.415-2\times1.732}{3}-1=\frac{5.026}{3}-1=0.675\cdots$$

したがって、求める最大の整数 i は　$\therefore i=6$　……(答)

（注）

積分近似を$k \geqq 2$で行うと、$n \geqq 3$のとき

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) < \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ \sqrt{(k+1)^2-1} - \sqrt{k^2-1} \right\} < \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) < \sqrt{n^2-1} - \sqrt{3} < \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(n)$$

$$\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3} + \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} < \sum_{k=2}^{n} f(k) < \sqrt{n^2-1} - \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore n - \sqrt{n^2-1} + \frac{\sqrt{3}}{3} < n - \sum_{k=2}^{n} f(k) < n - \sqrt{n^2-1} + \sqrt{3} - \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$

であるから

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} < \lim_{n\to\infty} \left\{ n - \sum_{k=2}^{n} f(k) \right\} < \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1.732}{3} = 0.577\cdots \quad \sqrt{3} - 1 = 0.732\cdots$$

したがって、範囲が定まらない。