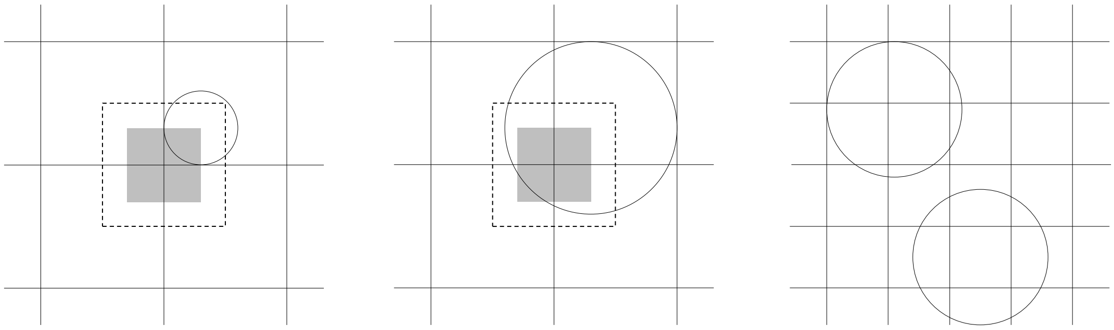
2001年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)

1辺の長さ h の正方形を単位ブロックとして考えればよい。
単位ブロック内において、条件を満たす半径1の円の中心の存在範囲を考える。

$2<h$ のとき　破線で示した単位ブロック内において、条件を満たす半径1の円の中心の存在範囲は網掛部のようになり、面積は4。
$1<h\leqq 2$ のとき　同様に、網掛部の面積は $4(h-1)^2$。
$h\leqq 1$ のとき　いかなる位置でも、半径1の円は4本以上の直線と交差する。

以上により　$\therefore\ 2<h$ のとき $p=\dfrac{4}{h^2}$　$1<h\leqq 2$ のとき $p=\dfrac{4(h-1)^2}{h^2}$　$h\leqq 1$ のとき $p=0$ ……(答)

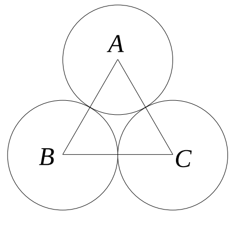


$2<h$　　$1<h\leqq 2$　　$h\leqq 1$

(2)

半径 $1+\sqrt{2}$ の定円 C と、半径1の円 C' があり、C と C' が交点を持つとする。
このとき、C' の中心の存在範囲は、C の中心からの距離が $\sqrt{2}$ 以上 $2+\sqrt{2}$ 以下のドーナツ型になる。

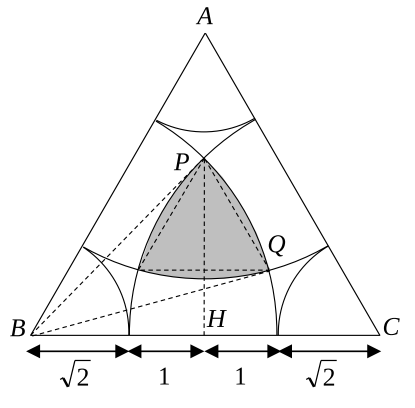
隣接した3つの半径 $1+\sqrt{2}$ の定円 C_1, C_2, C_3 を考え、
中心をそれぞれ A, B, C とする。
半径1の円 C' が C_1, C_2, C_3 のすべてと交点を持つような
C' の中心の存在範囲は、図の網掛け部のようになる。
C' が4つ以上の円と交点を持つことはないから、求める確率は
網掛け部の面積を正三角形 ABC の面積で割った値である。



$r=1+\sqrt{2}$ とすると、$BH=r,\ BP=\sqrt{2}r$ より

$\cos\angle PBH=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore \angle PBH=\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore \angle ABP=\dfrac{\pi}{12}$

対称性から $\angle CBQ=\dfrac{\pi}{12}$ であり、$\angle PBQ=\dfrac{\pi}{6}$ であることがわかる。



網掛け部の面積は

$$3\times\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}r\right)^2\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(2\sqrt{2}r\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$=r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12}\right)=r^2\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)\right\}=r^2\left(\frac{\pi}{2}-3+\sqrt{3}\right)$$

正三角形ABCの面積は　$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2r)^2=\sqrt{3}r^2$

したがって、求める確率は　$\therefore q=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-3+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+1-\sqrt{3}$　……(答)