2001 年東大理後期 $\boxed{3}$

（解答 1）

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ とする。$f(x)$ は下に凸である。

$k\to\infty$ について考えるので、k は十分に大きく、$f(x)$ が単調増加の範囲で考えてよい。

$f(x)$ は整数係数であるから、$f(k),\ f(k+1)$ は整数。

$f(x)$ が 1 変化する間に点 $P(x)$ は円上を一周するため、x が k から $k+1$ まで変化する間に、点 $P(x)$ は円上を $f(k+1)-f(k)$ 周する。今、$d(k)=f(k+1)-f(k)$ とおく。$y=f(k)+i\ (i=0,1,\cdots,d(k))$ となる x を x_i とする。

$x_0=k,\ x_{d(k)}=k+1$ である。

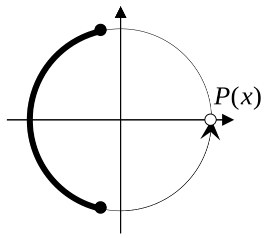
x の区間 $\left[x_i,\ x_{i+1}\right]\ (i=0,1,\cdots,d(k)-1)$ について考える。y の区間 $\left[f(x_i),\ f(x_{i+1})\right]$ において、$P(x)\in I$ となる区間が存在し、そのような y の区間の長さは $\dfrac{L}{2\pi}$ である。

i） y の区間 $\left[f(x_i),\ f(x_{i+1})\right]$ において、$P(x)\in I$ となる区間が一続きであるとき

$P(x)\in I$ となる y の区間の両端を $y_{i1},\ y_{i2}\ \left(y_{i1}<y_{i2}\right)$ とし、

対応する x の区間の両端を $x_{i1},\ x_{i2}\ \left(x_{i1}<x_{i2}\right)$ とする。

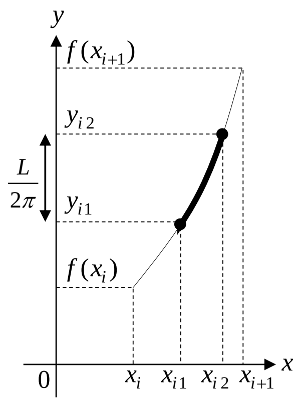
2 点を通る直線の傾きは



$$\frac{y_{i2}-y_{i1}}{x_{i2}-x_{i1}}=\frac{a({x_{i2}}^2-{x_{i1}}^2)+b(x_{i2}-x_{i1})}{x_{i2}-x_{i1}}=a(x_{i2}+x_{i1})+b$$

であるから

$$\therefore x_{i2}-x_{i1}=\frac{y_{i2}-y_{i1}}{a(x_{i2}+x_{i1})+b}$$



$k\leqq x_{i1}<x_{i2}\leqq k+1,\ y_{i2}-y_{i1}=\dfrac{L}{2\pi}$ より

$$\therefore \frac{L}{2\pi}\cdot\frac{1}{2a(k+1)+b}<x_{i2}-x_{i1}<\frac{L}{2\pi}\cdot\frac{1}{2ak+b}$$

$T_k=\displaystyle\sum_{i=0}^{d(k)-1}(x_{i2}-x_{i1})$ であるから $\quad\therefore \dfrac{L}{2\pi}\cdot\dfrac{d(k)}{2a(k+1)+b}<T_k<\dfrac{L}{2\pi}\cdot\dfrac{d(k)}{2ak+b}$

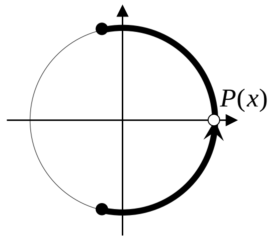
ここで、$d(k)=2ak+a+b$ より

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d(k)}{2a(k+1)+b}=\lim_{k\to\infty}\frac{2ak+a+b}{2ak+2a+b}=1,\ \lim_{k\to\infty}\frac{d(k)}{2ak+b}=\lim_{k\to\infty}\frac{2ak+a+b}{2ak+b}=1$$

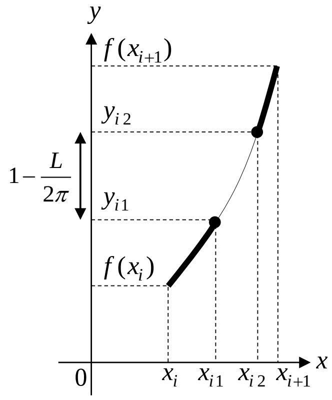
したがって、はさみうちの原理により $\quad\therefore \displaystyle\lim_{k\to\infty}T_k=\frac{L}{2\pi}$

ii） y の区間 $\left[f(x_i),\ f(x_{i+1})\right]$ において、 $P(x)\in I$ となる区間が一続きでないとき

この場合、 $P(x)\notin I$ である区間が一続きになっている。
$P(x)\notin I$ である y の区間の両端を $y_{i1},\ y_{i2}\ \left(y_{i1}<y_{i2}\right)$ とし、
対応する x の区間の両端を $x_{i1},\ x_{i2}\ \left(x_{i1}<x_{i2}\right)$ とする。



i）と同様に　$x_{i2}-x_{i1}=\dfrac{y_{i2}-y_{i1}}{a(x_{i2}+x_{i1})+b}$



$k\leqq x_{i1}<x_{i2}\leqq k+1,\ y_{i2}-y_{i1}=1-\dfrac{L}{2\pi}$ より

$$\therefore\left(1-\frac{L}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{2a(k+1)+b}<x_{i2}-x_{i1}<\left(1-\frac{L}{2\pi}\right)\cdot\frac{1}{2ak+b}$$

$T_k=1-\displaystyle\sum_{i=0}^{d(k)-1}(x_{i2}-x_{i1})$ であるから

$$\therefore 1-\left(1-\frac{L}{2\pi}\right)\cdot\frac{d(k)}{2ak+b}<T_k<1-\left(1-\frac{L}{2\pi}\right)\cdot\frac{d(k)}{2a(k+1)+b}$$

i）と同様に　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{d(k)}{2a(k+1)+b}=\lim_{k\to\infty}\frac{2ak+a+b}{2ak+2a+b}=1,\ \lim_{k\to\infty}\frac{d(k)}{2ak+b}=\lim_{k\to\infty}\frac{2ak+a+b}{2ak+b}=1$

であるから、はさみうちの原理により　$\displaystyle\therefore\lim_{k\to\infty}T_k=\frac{L}{2\pi}$

以上により、いずれにしても $\displaystyle\lim_{k\to\infty}T_k=\frac{L}{2\pi}$ が示された。（証明終）

（解答 2）
（解答 1）の i）において、平均値の定理より、

$f'(c)=\dfrac{y_{i2}-y_{i1}}{x_{i2}-x_{i1}},\ x_{i1}<c<x_{i2}$ となる定数 c が存在する。　$\therefore x_{i2}-x_{i1}=\dfrac{y_{i2}-y_{i1}}{f'(c)}=\dfrac{L}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{f'(c)}$

$f(x)$ の凸性より、 $f'(k)<f'(c)<f'(k+1)$ であるから　$\therefore\dfrac{L}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{2a(k+1)+b}<x_{i2}-x_{i1}<\dfrac{L}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{2ak+b}$

以下、（解答 1）と同様。

（注）

$f(x)$ が一般の n 次式の場合でも、n 次の係数が正ならば $\displaystyle\lim_{k\to\infty}T_k=\frac{L}{2\pi}$ が成立する。
本問では、 $f(x)$ は整数係数の 2 次式という設定なので、（解答 1）のように計算でも解ける。
一般の n 次式の場合は（解答 2）のように平均値の定理を用いるしかない。