2001年東大理 $\boxed{2}$

$$\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)dy=\int_0^{2\pi}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)f(y)dy=\sin x\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)dy+\cos x\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)dy$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)dy=\int_0^{2\pi}(\cos x\cos y+\sin x\sin y)f(y)dy=\cos x\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)dy+\sin x\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)dy$$

$A=\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)dy,\ B=\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)dy$ とおくと

$$\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)dy=B\sin x+A\cos x,\ \int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)dy=A\sin x+B\cos x$$

代入して

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}(B\sin x+A\cos x)+\frac{b}{2\pi}(A\sin x+B\cos x)+\sin x+\cos x=\left(\frac{aB+bA}{2\pi}+1\right)\sin x+\left(\frac{aA+bB}{2\pi}+1\right)\cos x$$

これより

$$A=\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)dy=\left(\frac{aB+bA}{2\pi}+1\right)\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy+\left(\frac{aA+bB}{2\pi}+1\right)\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy$$

$$B=\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)dy=\left(\frac{aB+bA}{2\pi}+1\right)\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy+\left(\frac{aA+bB}{2\pi}+1\right)\int_0^{2\pi}\cos^2 y\,dy$$

ここで

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2y}{2}dy=\left[\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{2\pi}=\pi \qquad \int_0^{2\pi}\cos^2 y\,dy=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 y)dy=2\pi-\pi=\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sin y\cos y\,dy=\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2y}{2}dy=\left[-\frac{1}{4}\cos 2y\right]_0^{2\pi}=0$$

$A=\dfrac{aB+bA}{2}+\pi,\ B=\dfrac{aA+bB}{2}+\pi$ であるから　$f(x)=\dfrac{A}{\pi}\sin x+\dfrac{B}{\pi}\cos x$

$A,\ B$ がただ一通りに定まることが条件である。

$(b-2)A+aB=-2\pi$ ——①　$aA+(b-2)B=-2\pi$ ——②

①、②より

$\{a^2-(b-2)^2\}A=-2\pi\{a-(b-2)\}$　$(a-b+2)\{(a+b-2)A+2\pi\}=0$

$\{a^2-(b-2)^2\}B=-2\pi\{a-(b-2)\}$　$(a-b+2)\{(a+b-2)B+2\pi\}=0$

$a-b+2=0$ であれば、$A,\ B$ がただ一通りに定まらない。

また、$a-b+2\neq 0$ であっても $a+b-2=0$ ならば $A,\ B$ が求められない。

したがって、求める条件は　$a-b+2\neq 0$ かつ $a+b-2\neq 0$ ……(答)

$a-b+2\neq 0$ かつ $a+b-2\neq 0$ のとき　$A=B=\dfrac{2\pi}{2-a-b}$　$\dfrac{A}{\pi}=\dfrac{B}{\pi}=\dfrac{2}{2-a-b}$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)$$ ……(答)