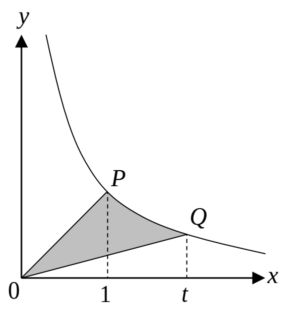
2001 年東大理 $\boxed{3}$



三角形OPQの面積は　$a(t)=\dfrac{1}{2}\left|1\cdot\dfrac{1}{t}-1\cdot t\right|=\dfrac{t^2-1}{2t}$

凸性より、線分PQと$xy=1$で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\int_1^t \frac{1}{x}dx=\frac{t^2-1}{2t}-\left[\log x\right]_1^t=\frac{t^2-1}{2t}-\log t$$

$$\therefore b(t)=a(t)-\frac{t^2-1}{2t}+\log t=\log t \qquad \therefore c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}=\frac{2t\log t}{t^2-1}$$

これより

$$c'(t)=2\cdot\frac{(\log t+1)(t^2-1)-t\log t\cdot(2t)}{(t^2-1)^2}=2\cdot\frac{t^2\log t-\log t+t^2-1-2t^2\log t}{(t^2-1)^2}=2\cdot\frac{t^2-1-(t^2+1)\log t}{(t^2-1)^2}$$

さらに、$d(t)=t^2-1-(t^2+1)\log t$とすると

$$d'(t)=2t-2t\log t-\frac{t^2+1}{t}=t(1-2\log t)-\frac{1}{t} \qquad d''(t)=1-2\log t-2+\frac{1}{t^2}=-2\log t+\frac{1}{t^2}-1$$

$$d'''(t)=-\frac{2}{t}-\frac{2}{t^3}=-\frac{2(t^2+1)}{t^3}<0$$

$d''(t)$は単調減少であり、$d''(1)=0$より、$t>1$において$d''(t)<0$。

$d'(t)$は単調減少であり、$d'(1)=0$より、$t>1$において$d'(t)<0$。

$d(t)$は単調減少であり、$d(1)=0$より、$t>1$において$d(t)<0$。

したがって、$t>1$において$c'(t)=\dfrac{2d(t)}{(t^2-1)^2}<0$であるので、題意は示された。（証明終）