2001 年東大理 $\boxed{5}$

最初に x リットルの水が入っているビーカーを、ビーカー A とおく。

(1)
ビーカー A は最後まで水が増えずに残ると仮定する。
操作が終わると、ビーカー A 以外のビーカーには $1-x$ リットルの水が入っている。
1 つ前の操作を考えると、$1-x$ リットルの水は 2 つのビーカーに分かれて入っており、
なおかついずれも x リットル以下でなければならないから、

$$1-x \leqq 2x \quad \therefore x \geqq \frac{1}{3}$$

これは $x<\frac{1}{3}$ に矛盾する。したがって、仮定は誤りであり、ビーカー A は操作の途中で取り除かれるか、
最後まで残って水が増えている。(証明終)

(2)
$x \geqq \frac{1}{2}$ であれば明らかに成立するので、$\frac{2}{5}<x<\frac{1}{2}$ について考える。
ビーカー A は操作の途中で取り除かれるか、最後まで残って水が増えていると仮定する。
このとき、ある操作後にビーカー A より水の量が多いビーカーが現れ、なおかつビーカー A 以外に 2 つ以上のビーカーが残っていなければならない。

各操作において、水の量が少ない順に下から 2 つのビーカーの水が足し合わされる。
今、ビーカー A 以外に m 個 $(m \geqq 3)$ のビーカーが残っており、それらの水の量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$ について

$x>x_m \geqq \cdots \geqq x_2 \geqq x_1$ かつ $x_1+x_2 \geqq x$ が成り立つとすると　$2x_2 \geqq x \quad \therefore x_2 \geqq \frac{x}{2}$

$x_1+x_2+\cdots+x_m=1-x$ より　$x_3+\cdots+x_m \leqq 1-2x \quad (m-2)x_3 \leqq 1-2x \quad \therefore x_3 \leqq \frac{1-2x}{m-2}$

$x>\frac{2}{5}$ であるから　$x_2>\frac{1}{5} \quad x_3<\frac{1}{5(m-2)} \leqq \frac{1}{5}$　これは $x_3 \geqq x_2$ に矛盾する。

したがって、仮定は誤りであり、初めてビーカー A より水の量が多いビーカーが現れるのは最後の操作後であるから、ビーカー A は最後まで水が増えずに残る。(証明終)