

2002 年東大文 3

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx & f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c & f''(x) &= 6ax + 2b \\ g(x) &= px^3 + qx^2 + rx & g'(x) &= 3px^2 + 2qx + r & g''(x) &= 6px + 2q \end{aligned}$$

$$f'(0) = g'(0) \text{ より } c = r \text{ ——①} \quad f(-1) = -1 \text{ より } -a + b - c = -1 \text{ ——②}$$

$$f'(-1) = 0 \text{ より } 3a - 2b + c = 0 \text{ ——③} \quad g(1) = 3 \text{ より } p + q + r = 3 \text{ ——④}$$

$$g'(1) = 0 \text{ より } 3p + 2q + r = 0 \text{ ——⑤}$$

$$\text{②、③より } a, b \text{ について解くと } \therefore a = c - 2, b = 2c - 3 \text{ ——⑥}$$

$$\text{④、⑤より } p, q \text{ について解くと } \therefore p = r - 6, q = -2r + 9 \text{ ①より } \therefore p = c - 6, q = -2c + 9 \text{ ——⑦}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{f''(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{g''(x)\}^2 dx &= \int_{-1}^0 (36a^2x^2 + 24abx + 4b^2) dx + \int_0^1 (36p^2x^2 + 24pqx + 4q^2) dx \\ &= [12a^2x^3 + 12abx^2 + 4b^2x]_{-1}^0 + [12p^2x^3 + 12pqx^2 + 4q^2x]_0^1 \\ &= 12a^2 - 12ab + 4b^2 + 12p^2 + 12pq + 4q^2 \end{aligned}$$

⑥、⑦を代入して整理すると

$$\begin{aligned} &12\{(c-2)^2 - (c-2)(2c-3) + (c-6)^2 - (c-6)(2c-9)\} + 4\{(2c-3)^2 + (2c-9)^2\} \\ &= 12\{c^2 - 4c + 4 - (2c^2 - 7c + 6) + c^2 - 12c + 36 - (2c^2 - 21c + 54)\} + 4\{(4c^2 - 12c + 9) + (4c^2 - 36c + 81)\} \\ &= 12(-2c^2 + 12c - 20) + 4(8c^2 - 48c + 90) = 8c^2 - 48c + 120 = 8(c-3)^2 + 48 \end{aligned}$$

したがって、 $c=3$ のとき最小になるから $\therefore a=1, b=3, p=-3, q=3, r=3$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, g(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x \text{ …… (答)}$$