2002年東大理後期 1

(1)

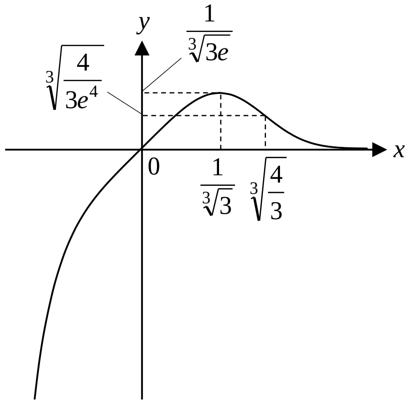
$f(x)=xe^{-x^3}\qquad f'(x)=e^{-x^3}+x\cdot(-3x^2e^{-x^3})=(1-3x^3)e^{-x^3}$

$f''(x)=-9x^2e^{-x^3}+(1-3x^3)\cdot(-3x^2e^{-x^3})=-3x^2\left\{3+(1-3x^3)\right\}e^{-x^3}=-3x^2(4-3x^3)e^{-x^3}$

増減、凹凸は下の通り。

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}e^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3e}}\qquad f\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\right)=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}e^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3e^4}}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\cdots$	$\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	＋	＋	＋	0	－	－	－
$f''(x)$	－	0	－	－	－	0	＋
$f(x)$	↗		↗		↘		↘



グラフの概形は右の通り。

(2)

$V_1(C)=\pi\int_0^C x^2e^{-2x^3}dx\qquad t=x^3$ とおくと $\quad dt=3x^2dx$

$V_1(C)=\dfrac{\pi}{3}\int_0^{C^3}e^{-2t}dt=\dfrac{\pi}{3}\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{C^3}=\dfrac{\pi}{6}(1-e^{-2C^3})\qquad\therefore\lim_{C\to\infty}V_1(C)=\dfrac{\pi}{6}$ ……(答)

(3)

$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{3e}}}x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}x^2(1-3x^3)e^{-x^3}dx\qquad t=x^3$ とおくと $\quad dt=3x^2dx$

$\therefore V_2=\dfrac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}(1-3t)e^{-t}dt=\dfrac{\pi}{3}\left\{\left[-(1-3t)e^{-t}\right]_0^{\frac{1}{3}}-3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{-t}dt\right\}=\dfrac{\pi}{3}\left\{1-3\left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{1}{3}}\right\}$

$=\dfrac{\pi}{3}\left\{1-3\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}+1\right)\right\}=\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}-\dfrac{2}{3}\right)$ ……(答)