

(1)

$P_1P_2^2 = P_2P_3^2 = P_3P_1^2 = 2(a^2 - ab + b^2)$ であるから、 $\triangle P_1P_2P_3$ は正三角形であり、面積は

$$\therefore S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2(a^2 - ab + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - ab + b^2) \dots\dots (\text{答})$$

また、3 点 P_1, P_2, P_3 を通る平面の方程式は、 $x + y + z = a + b$ で与えられるので、原点 O との距離は

$$\therefore d_1 = \frac{|0+0+0-(a+b)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{a+b}{\sqrt{3}} \dots\dots (\text{答})$$

(2)

四面体 $OP_1P_2P_3$ の体積は、(1) より

$$\therefore V_1 = \frac{1}{3} S_1 d_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - ab + b^2) \cdot \frac{a+b}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} (a^3 + b^3) \dots\dots (\text{答})$$

次に、 $T_2(0, a, 0)$ とすると、 $\triangle OP_1T_2$ の面積は $\frac{1}{2} a^2$ であるから、四面体 $P_2OP_1T_2$ の体積は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot b = \frac{1}{6} a^2 b$ 。

対称性より、四面体 $OP_1P_2S_2$ の体積はこの 2 倍であるから $\therefore V_2 = \frac{1}{3} a^2 b \dots\dots (\text{答})$

(3)

対称性より、 D の体積は $V = 8V_1 + 12V_2$ であるから、

$$\therefore V = 8 \times \frac{1}{6} (a^3 + b^3) + 12 \times \frac{1}{3} a^2 b = \frac{4}{3} (a^3 + b^3) + 4a^2 b = \frac{4}{3} a^3 \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 3 \cdot \frac{b}{a} \right\}$$

$$a^3 = \cos^3 \theta = (\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \text{ であるから } \therefore V(t) = \frac{4(1 + 3t + t^3)}{3(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \dots\dots (\text{答})$$

(4)

$$V'(t) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(3 + 3t^2)(1 + t^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + 3t + t^3) \cdot \frac{3}{2} (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t}{(1 + t^2)^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3(1 + t^2)^2 - 3t(1 + 3t + t^3)}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= 4 \cdot \frac{1 + 2t^2 + t^4 - t - 3t^2 - t^4}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4(1 - t - t^2)}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + t\right)\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - t\right)}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

t	0	...	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$...	1
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		\nearrow		\searrow	

$0 < t < 1$ における $V(t)$ の増減は左の通りで、
 $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき $V(t)$ は最大。……(答)

(注)

$V(t)$ が最大のとき、 D は正二十面体であり、長方形 L_1, L_2, L_3 の辺の長さは黄金比になっている。