2002年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

$0 \leqq b \leqq \frac{1}{2}$ のとき　$2b = b$　$\therefore b = 0$　$\frac{1}{2} < b \leqq 1$ のとき　$-2b + 2 = b$　$3b = 2$　$\therefore b = \frac{2}{3}$

以上により　$b = 0,\ \frac{2}{3}$ ……(答)

(2)

$a_4 = 0$ のとき　$a_3 = 0,\ 1$

　$a_3 = 0$ のとき　$a_2 = 0,\ 1$　$a_2 = 0$ のとき　$a_1 = 0,\ 1$　$a_2 = 1$ のとき　$a_1 = \frac{1}{2}$

　$a_3 = 1$ のとき　$a_2 = \frac{1}{2}$　$a_1 = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{2}{3}$ のとき　$a_3 = \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$

　$a_3 = \frac{1}{3}$ のとき　$a_2 = \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$　$a_2 = \frac{1}{6}$ のとき　$a_1 = \frac{1}{12},\ \frac{11}{12}$　$a_2 = \frac{5}{6}$ のとき　$a_1 = \frac{5}{12},\ \frac{7}{12}$

　$a_3 = \frac{2}{3}$ のとき　$a_2 = \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$　$a_2 = \frac{1}{3}$ のとき　$a_1 = \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$　$a_2 = \frac{2}{3}$ のとき　$a_1 = \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$

以上により　$a_1 = 0,\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{12},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{11}{12},\ 1$　$\therefore a_1 = \frac{k}{12}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 12)$ ……(答)

(3)

ある $n \geqq 2$ に対して $a_n = 0$ または $a_n = \frac{2}{3}$ となる条件は、$a_1 = \frac{k}{3 \cdot 2^{n-2}}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{n-2})$ と予想できる。

これを数学的帰納法により示す。$n = 2$ のとき $a_1 = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1$ で、$a_2 = 0$ または $a_2 = \frac{2}{3}$ が成立。

$a_1 = \frac{k}{3 \cdot 2^{l-2}}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{l-2})$ のとき、$a_l = 0$ または $a_l = \frac{2}{3}$ が成立すると仮定する。

　$a_1 = \frac{k}{3 \cdot 2^{l-1}}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{l-1})$ のとき

　$0 \leqq k \leqq 3 \cdot 2^{l-2}$ であれば　$a_2 = \frac{k}{3 \cdot 2^{l-2}}$　$3 \cdot 2^{l-2} + 1 \leqq k \leqq 3 \cdot 2^{l-1}$ であれば　$a_2 = \frac{3 \cdot 2^{l-1} - k}{3 \cdot 2^{l-2}}$

　結局、$a_2 = \frac{k}{3 \cdot 2^{l-2}}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{l-2})$ と表せる。

したがって、仮定により $a_{l+1} = 0$ または $a_{l+1} = \frac{2}{3}$ となるから、$n = l + 1$ でも成立する。

以上により　$\therefore \begin{cases} n = 1 \text{のとき} & a_1 = 0,\ \frac{2}{3} \\ n \geqq 2 \text{のとき} & a_1 = \frac{k}{3 \cdot 2^{n-2}}\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{n-2}) \end{cases}$ ……(答)

(4)

背理法で示す。a_1が(3)の条件を満たさないとき、常に$a_n<\frac{3}{4}$である ——(A) と仮定する。

$a_1<\frac{1}{2}$のとき 数列$\{a_n\}$は$\frac{1}{2}$を超えるまで2倍になるから、必ず$a_m>\frac{1}{2}$となるmが存在する。

仮定により$\frac{1}{2}<a_m<\frac{3}{4}$であるが、$a_{m+1}<\frac{3}{4}$となるには$\frac{5}{8}<a_m<\frac{3}{4}$でなければならない。

$\frac{5}{8}<a_m<\frac{3}{4}$のとき$\frac{1}{2}<a_{m+1}<\frac{3}{4}$であるが、$a_{m+2}<\frac{3}{4}$となるには$\frac{5}{8}<a_{m+1}<\frac{3}{4}$でなければならない。

以下帰納的に、$n\geqq m$のとき、$\frac{5}{8}<a_n<\frac{3}{4}$でなければならないことがわかる。

$n\geqq m$のとき、常に$\frac{5}{8}<a_n<\frac{3}{4}$である ——(B) と仮定する。

$n\geqq m$において、漸化式$a_{n+1}=-2a_n+2$が成り立つので

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_n-\frac{2}{3}\right)\quad a_n-\frac{2}{3}=\left(a_m-\frac{2}{3}\right)(-2)^{n-m}\quad \therefore a_n=\frac{2}{3}+\left(a_m-\frac{2}{3}\right)(-2)^{n-m}$$

$a_m\neq\frac{2}{3}$のとき、数列$\{a_n\}$が発散するのは明らかである。

$\frac{5}{8}<a_n<\frac{3}{4}$となるには$a_m=\frac{2}{3}$でなければならず、結局$n\geqq m$において$a_n=\frac{2}{3}$でなければならない。

ところが、a_1が(3)の条件を満たさないので、$a_n=\frac{2}{3}$にはなり得ない。

したがって仮定(B)は誤りであり、その前提である仮定(A)も誤りである。

$a_1>\frac{1}{2}$のとき 同様の議論により、$\frac{5}{8}<a_n<\frac{3}{4}$、$a_n=\frac{2}{3}$が導かれ、仮定(A)は誤りである。

以上により、a_1が(3)の条件を満たさないとき、$a_n\geqq\frac{3}{4}$となる$n\geqq1$が存在する。(証明終)

(5)

a_1が(3)の条件を満たすとき、ある$n\geqq1$に対して$a_n=0$または$a_n=\frac{2}{3}$となり、以降値は一定である。

すなわち、数列$\{a_n\}$は収束する。a_1が(3)の条件を満たさないときを考える。

(4)より、$a_n>\frac{3}{4}$となる$n\geqq1$が存在する$\left(\because a_n\neq\frac{3}{4}\right)$。すると、$a_{n+1}<\frac{1}{2}$となる。

同様に、$a_{n+m}>\frac{3}{4}$となる$m\geqq2$が存在する。すると、$a_{n+m+1}<\frac{1}{2}$となる。

以下、数列$\{a_n\}$は$a_n<\frac{1}{2}$になったり$a_n>\frac{3}{4}$になったりを繰り返す。すなわち、数列$\{a_n\}$は収束しない。

以上により、数列$\{a_n\}$が収束するための必要十分条件は、a_1が(3)の条件を満たすことであるから、

$$\therefore a_1=\frac{k}{3\cdot2^l}\ (l\geqq0,\ k=0,1,\cdots,3\cdot2^l)$$ ……(答)