2002年東大理 $\boxed{3}$

球面 S の方程式は　$x^2+y^2+z^2=1$ ——①

また、$P(a, b, c)$ としたとき、OP を直径とする球面の方程式は

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \quad \therefore x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \text{ ——②}$$

平面 L の方程式は、①－②より　$\therefore ax+by+cz=1$

点の平面の距離の公式より

$$PQ=\frac{|a^2+b^2+c^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad AR=\frac{|0+0-c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|c+1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$PQ \leqq AR$ より　$|a^2+b^2+c^2-1| \leqq |c+1|$

ここで、P は S の外部の点であるから　$a^2+b^2+c^2>1$　$\therefore a^2+b^2+c^2-1>0$

$$0<a^2+b^2+c^2-1 \leqq |c+1| \quad \therefore c+1 \leqq -(a^2+b^2+c^2-1),\ a^2+b^2+c^2-1 \leqq c+1$$

$c+1 \leqq -(a^2+b^2+c^2-1)$ のとき　$a^2+b^2+c^2+c \leqq 0$　$\therefore a^2+b^2+\left(c+\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}$ ——③

③が表す領域は、OA を直径とする球面およびその内部であり、S の内部に含まれるので、不適。

$a^2+b^2+c^2-1 \leqq c+1$ のとき　$a^2+b^2+c^2-c \leqq 2$　$\therefore a^2+b^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4}$ ——④

S 全体が④が表す領域に含まれる。

以上により、P の動く範囲 V は　$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4}$ かつ $x^2+y^2+z^2>1$ ……(答)

V の体積は、半径 $\frac{3}{2}$ の球の体積から、半径1の球の体積を引いたものであるから　$\frac{4}{3}\pi\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3-1\right\}=\frac{19}{6}\pi$

$10-\frac{19}{6}\pi=\frac{19}{6}\left(\frac{60}{19}-\pi\right)$ より　$\frac{60}{19}=3.157\cdots>\pi$　$\therefore 10>\frac{19}{6}\pi$ （証明終）