2002 年東大理 $\boxed{5}$

xy 平面上の線分 P_0P_n は、$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{n-1}$ によって n 等分されており、$P_kP_{k+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$

三角形 OP_kP_{k+1} の面積は、OP_0P_n の面積の $\dfrac{1}{n}$ であるから　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2n}$

$$OQ_k{}^2=P_kQ_k{}^2-OP_k{}^2=1-\left\{\frac{k^2}{n^2}+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right\}=2\frac{k}{n}-2\frac{k^2}{n^2}=2\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\quad\therefore OQ_k=\sqrt{2\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\right\}}$$

$$\therefore V_k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\sqrt{2\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2}\quad\therefore\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

区分求積法により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,dx$ は、半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ であるから　$\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot2\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$　……(答)