2002 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\} \to \{5,\ 1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 3,\ 8,\ 4\} \to \{7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2\} \to \{8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$ ……（答）

(2)

$1 \leqq k \leqq N$ のとき $f(k)$ は k 番目の偶数になり、$N+1 \leqq k \leqq 2N$ のとき $f(k)$ は $k-N$ 番目の奇数になるから

$$f(k) = \begin{cases} 2k & (1 \leqq k \leqq N) \\ 2(k-N)-1 & (N+1 \leqq k \leqq 2N) \end{cases} \quad \therefore\ f(k)-2k = \begin{cases} 0 & (1 \leqq k \leqq N) \\ -(2N+1) & (N+1 \leqq k \leqq 2N) \end{cases}$$

したがって、$1 \leqq k \leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、$f(k)-2k$ は $2N+1$ で割り切れる。（証明終）

(3)

数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ を m 回シャッフルしたとき得られる数列において、数 k の位置を $f_m(k)$ と表す。

このとき、(2) より
$$f_{m+1}(k) = \begin{cases} 2f_m(k) & (1 \leqq f_m(k) \leqq N) \\ 2f_m(k)-(2N+1) & (N+1 \leqq f_m(k) \leqq 2N) \end{cases}$$

$$f_1(k) = \begin{cases} 2k & (1 \leqq k \leqq N) \\ 2k-(2N+1) & (N+1 \leqq k \leqq 2N) \end{cases}$$

$$f_2(k) = \begin{cases} 2^2 k & (1 \leqq k \leqq N,\ 1 \leqq f_1(k) \leqq N) \\ 2^2 k-(2N+1) & (1 \leqq k \leqq N,\ N+1 \leqq f_1(k) \leqq 2N) \\ 2^2 k-2(2N+1) & (N+1 \leqq k \leqq 2N,\ 1 \leqq f_1(k) \leqq N) \\ 2^2 k-3(2N+1) & (N+1 \leqq k \leqq 2N,\ N+1 \leqq f_1(k) \leqq 2N) \end{cases}$$

これより、$f_2(k)-2^2 k$ は $2N+1$ で割り切れる。

$f_m(k)-2^m k$ は $2N+1$ で割り切れると予想できるので、数学的帰納法で示す。$m=1,\ 2$ において成立。

$m=l$ のとき、p を非負整数として $f_l(k)-2^l k = -p(2N+1)$ と仮定すると　$f_l(k) = 2^l k - p(2N+1)$

$$f_{l+1}(k) = \begin{cases} 2^{l+1}k-2p(2N+1) & (1 \leqq f_l(k) \leqq N) \\ 2^{l+1}k-(2p+1)(2N+1) & (N+1 \leqq f_l(k) \leqq 2N) \end{cases}$$

$$\therefore\ f_{l+1}(k)-2^{l+1}k = \begin{cases} -2p(2N+1) & (1 \leqq f_l(k) \leqq N) \\ -(2p+1)(2N+1) & (N+1 \leqq f_l(k) \leqq 2N) \end{cases}$$

以上により、$m=l+1$ においても成立し、$f_m(k)-2^m k$ が $2N+1$ で割り切れることが示された。

今、$N=2^{n-1}$ のとき、$f_m(k)-2^m k$ は 2^n+1 で割り切れる。$m=2n$ のとき

$$f_{2n}(k)-2^{2n}k = f_{2n}(k)-\{(2^{2n}-1)+1\}k = f_{2n}(k)-k-(2^n+1)(2^n-1)k$$

したがって、$f_{2n}(k)-k$ は 2^n+1 で割り切れなければならない。

$1 \leqq k \leqq 2^n,\ 1 \leqq f_{2n}(k) \leqq 2^n$ であるから　$-(2^n-1) \leqq f_{2n}(k)-k \leqq 2^n-1$

結局、$f_{2n}(k)-k$ が 2^n+1 で割り切れるのは、$f_{2n}(k)-k=0$ のとき、$f_{2n}(k)=k$ のときに限られる。

これは、数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$ を $2n$ 回シャッフルすると、すべての数が元の位置に戻ることを意味するので、題意は示された。（証明終）