2002年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(1)

$x^{n+1}=(x^2-x-1)Q(x)+a_n x+b_n$とおける。両辺に$x$をかけると

$$x^{n+2}=x(x^2-x-1)Q(x)+a_n x^2+b_n x=x(x^2-x-1)Q(x)+a_n\{(x^2-x-1)+(x+1)\}+b_n x$$
$$=(x^2-x-1)\{xQ(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n$$

したがって、x^{n+2}をx^2-x-1で割った余りは$(a_n+b_n)x+a_n$であり、これは$a_{n+1}x+b_{n+1}$に等しいから

$$\therefore\begin{cases}a_{n+1}=a_n+b_n\\ b_{n+1}=a_n\end{cases}$$ (証明終)

(2)

$x^2=(x^2-x-1)+x+1$であるから　$\therefore a_1=b_1=1$

以下帰納的に、a_n, b_nが共に正の整数であることは明らかである。

$n\geqq 2$のとき、a_n, b_nが公約数mを持つとすると、$a_n=am,\ b_n=bm\ (a>b)$と書ける。

このとき、(1)より　$a_{n-1}=bm,\ b_{n-1}=(a-b)m$

したがって、a_{n-1}, b_{n-1}も公約数mを持つ。以下帰納的に、a_1, b_1も公約数mを持つ。

ところが、$a_1=b_1=1$より、$m=1$しかあり得ない。

以上により、a_n, b_nは互いに素であることが示された。(証明終)